Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4135 Matematikk 4D Høsten 2009

Øving 11

1 I denne oppgaven er f en funksjon som har kontinuerlige deriverte til og med orden 4. Vi ønsker å evaluere $\int_a^b f(x)dx$ ved gjelp av Gausskvadratur, G_2, med 2 delepunkter i hvert intervall. Presisjonsgraden til denne metoden er 3, og ordenen er 4. Vi har

$$J_{\mathrm{G}_2}\left[f,[x,x+h]\right] = \tfrac{h}{2}\left(f(x+\alpha_1)+f(x+\alpha_2)\right) \approx \int_x^{x+h} f(x)dx,$$

der $\alpha_1 = \frac{h}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ og $\alpha_2 = \frac{h}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

Dersom vi deler intervallet $[0,1]$ i n like store delintervaller er feilen

$$\int_0^1 f(x)dx - J_{\mathrm{G}_2}(n) = -\tfrac{1}{4320} f^{(4)}(\xi)h^4$$

for en $\xi \in \langle 0,1\rangle$ og $h = \frac{1}{n}$.

Anta at $|f^{(4)}(x)| \leq 24$ på hele intervallet. Hvor stor må vi velge n for at feilen i absoluttverdi ikke skal overstige 10^{-13}? Vi ser bort fra avrundingsfeil.

2 Beregn kolonnesumnormen og radsumnormen til matrisen C i Eksempel 2 på side 849 (Kreyszig 9).

3 (Kreyszig Oppgave 20.3.4 side 850.) Vi skal bruke Gauss-Seidel iterasjon til å løse likningssystemet $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, der

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10,5 \\ 25,5 \end{bmatrix}.$$

a) Skriv først systemet på formen $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})x = \boldsymbol{b}'$ og beregn Frobeniusnormen til $\boldsymbol{C}$, der $\boldsymbol{C} = -(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$.
Hint: Vi har $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{L})^{-1} = \boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^2$ (Hvorfor?)

b) Bruk startverdien $\boldsymbol{x}^0 = [1,1,1]^T$ og gjør 2 iterasjoner med Gauss-Seidels algoritme. Bruk 6S i alle beregningene.(På lommeregner er vel dette svært tidkrevende, så bruk bare det som lommeregneren bruker. Sannsynligvis 10S, og så avrunding til 9S når resultatet vises.)