Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4135
Matematikk 4D
Høsten 2009

Øving 12

$\boxed{1}$ Vi skal se på metoder for løse systemet

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bruk startvektoren $\boldsymbol{u}_0 = [1/2, 1, 1/2]^T$.

a) Utfør to iterasjoner med Gauss-Jacobi.

b) Utfør to iterasjoner med Gauss-Seidel.

c) Skriv begge iterasjonenene på formen:

$$x^{(n+1)} = Cx^{(n)} + g$$

og bevis konvergens for begge metodene ved å beregne

$$\|C\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2}.$$

Hint: Inversen til en nedretriangulær matrise med konstante diagonaler er også nedretriangulær med konstante diagonaler.

$\boxed{2}$

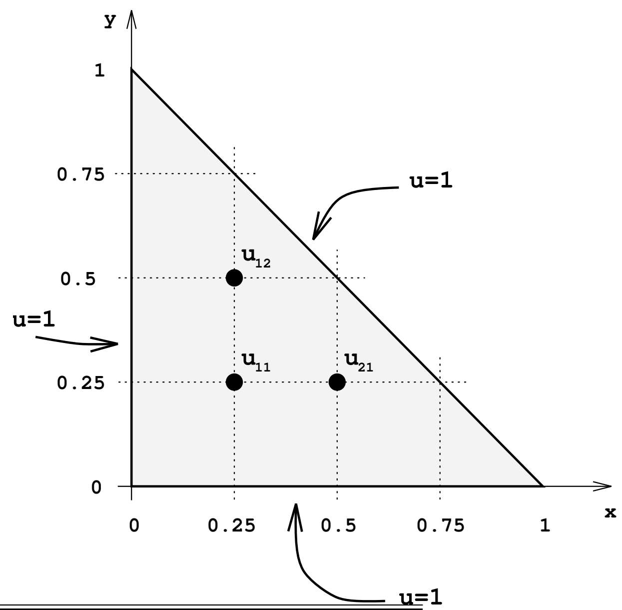
Gitt Poisson-ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = -1$$

i et område R, gitt ved

$$R = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\},$$

og med $u(x, y) = 1$ på randen av R, se figuren til høyre.



La $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, med $x_i = ih$ og $y_j = jh$.
Bruk skrittlengde $h = 0.25$ i både x- og y-retning og sett opp differanseligningene for u_{ij} i hvert av de indre punktene.

Finn u_{11}, u_{12} og u_{21}.

Bruk formlene **(6a)** og **(6b)** på side 911 og sett $h = k$.

$\boxed{3}$ Finn en tilnærming til løsningen av initialverdiproblemet

$$\begin{cases} x'(t) = -9y(t), \quad x(0) = 3, \\ y'(t) = x(t), \quad y(0) = 0, \end{cases}$$

ved $t = 0.2$ ved hjelp av

a) Heuns metode ($h = 0.2$). (Kun ett skritt.)

b) Baklenges Euler ($h = 0.2$). (Kun ett skritt.)

c) Sammenlign med den eksakte løsningen

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos 3t, \\ y(t) = \sin 3t. \end{cases}$$