Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 13

1 La $y(t)$ være løsningen av initialverdiproblemet

$$y'' + 4y' + 4y = f(t) \quad \text{for } t > 0$$
$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

der

$$f(t) = \begin{cases} 5\sin t & \text{for } 0 < t < 2\pi, \\ 0 & \text{for } t > 2\pi. \end{cases}$$

Vis at da er Laplacetransformasjonen til y er

$$Y(s) = G(s)(1 - e^{-2\pi s}) \quad \text{der} \quad G(s) = \frac{3-4s}{5(s^2+1)} + \frac{4}{5(s+2)} + \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Finn $y(2\pi)$.

2 **a)** Finn alle funksjoner $u(x,t) = F(x)G(t)$ slik at

$$t^3 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{for} \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \tag{1}$$

og

$$u(0,t) = 0 = u(\pi,t) \quad \text{for} \quad t > 0. \tag{2}$$

b) Finn en funksjon $u(x,t)$ som tilfredstiller (1), (2) og

$$u(x,1) = 4\sin x + \sin 4x.$$

3 **a)** Finn den Fouriertransformerte $\hat{u}(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-ixw} dx$ til den generelle løsningen $u(x,t)$ av den partielle differensialligningen

$$u_t = u_{xx} - u, \tag{3}$$

som tilfredsstiller randbetingelsene

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_x(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_{xx}(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_t(x,t) = 0 \quad \text{for alle } t \geq 0. \tag{4}$$

b) Bestem tilslutt den løsningen $u(x,t)$ av ligning (3) som tilfredsstiller (4), og initialbetingelsen

$$u(x,0) = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

$\boxed{4}$ La f være funksjonen gitt ved $f(x,y,z) = 2xyz(e^x + e^y - e^z)$, og la $\mathbf{v}$ være en vektor som står vinkelrett både på $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ og som har negativ $\mathbf{k}$-komponent. Finn den retningsderiverte av f i punktet $P : (1, -1, -1)$ i retningen til vektoren $\mathbf{v}$.

$\boxed{5}$ Gitt integralet

$$I = \int_1^2 e^{2x} dx$$

Finn en tilnærmelse S til integralet I ved bruk av Simpsons metode, med skrittlengde $h = 0.25$.

Finn en øvre grense for feilen $|I - S|$.

Simpsons metode med skrittlengde $h = 0.5$ vil gi tilnærmelsen 23.721559. Bruk dette til å finne en tilnærmelse til feilen $I - S$.

$\boxed{6}$ Vi skal løse diffusjonsligningen med et kildeledd, gitt ved

$$u_t = u_{xx} + x, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad t \ge 0,$$

med randbetingelsene

$$u(0,t) = 1, \qquad u(1,t) = 0, \qquad t \ge 0$$

og startbetingelsen

$$u(x,0) = 1 - x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

La h være skrittlengden i x-retningen og k i t-retningen, og formuler en eksplisitt metode som gir tilnærmelse til løsningen $u(x,t)$ i punktene (x_i, t_j) der $x_i = ih$ og $t_j = jk$.

La $h = 0.25$, $k = 0.01$, og bruk metoden til å finne tilnærmelser til $u(0.25, 0.01)$, $u(0.5, 0.01)$ og $u(0.75, 0.01)$.

$\boxed{7}$ Bruk Laplacetransformasjonen til å løse initialverdiproblemet

$$y' + y + \int_0^t y(\tau)e^{t-\tau} d\tau = u(t-1) \quad \text{for } t > 0, \qquad y(0) = 1.$$

$\boxed{8}$ La f være den 2π-periodiske funksjonen gitt ved $f(x) = x^4$ for $-\pi < x \le \pi$. Det oppgis at f har Fourierrekke

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} \cos nx$$

Bruk dette til å finne summen av rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - 6}{n^4} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^4 n^4 - 12\pi^2 n^2 + 36}{n^8}$$

9 **a)** Finn alle løsninger påformen $u(x,t) = F(x)G(t)$ av differensialligningen

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{6}$$

b) Finn $u(x,t)$ som oppfyller (5) og (6) samt initialbetingelsene

$$u(x,0) = 0 \quad \text{og} \quad u_t(x,0) = \sin 4x.$$

10 Finn den Fouriertransformerte $\widehat{f}(w)$ av funksjonen

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{for} \quad -\infty < x < \infty.$$

Bruk resultatet til å vise at

$$\int_0^\infty \frac{\cos w}{1+w^2}\, dw = \frac{\pi}{2e}.$$

11 Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4x_1 - 16x_2 + 4x_3 &= 2 \\ -\ \ x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 4x_1 - \ \ x_2 \qquad &= 2. \end{aligned}$$

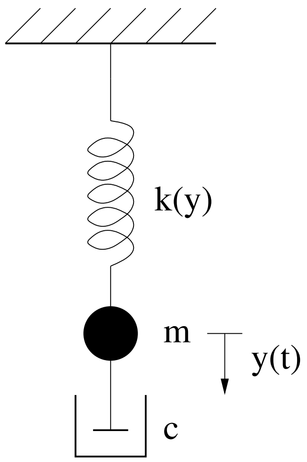
Kan dette systemet løses ved bruk av Jacobi-iterasjoner? Begrunn svaret.

Hvis ja: Utfør én Jacobi-iterasjon, med startverdiene $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$.

Hvis nei: Skriv om systemet slik at Jacobi-iterasjonene kan utføres. Utfør deretter én iterasjon, med startverdiene $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$.

12 Denne oppgaven tar for seg en mekanisk svingekrets, der fjær-koeffisienten k avhenger av hvor mye fjæren strekkes eller klemmes sammen.
Med $m = 1$, $c = 0.5$ og $k(y) = 2 + y^2$ vil bevegelsen av kula i svingekretsen til høyre beskrives av ligningen

$$y'' + 0.5y' + 2y + y^3 = 0.$$



Skriv ligningen om til et system av første ordens ordinære differensialligninger.

La $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ og bruk Heuns metode med skrittlengde $h = 0.1$ til å finne tilnærmelser til $y(0.1)$ og $y(0.2)$.