TMA4135
Matematikk 4D
Høsten 2009

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 5

K9 avsnitt 11.6

1 Finn det trigonometriske polynomet med periode π, $F_N(x)$ av grad N som approksimerer funksjonen $f(x) = |x|$ på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ og som gjør kvadratfeilen $E = E_N$ minst mulig, for $N = 1, 2, 3$ og 4.

2 La funksjonen $f(x)$ være definert som

$$f(x) = \begin{cases} x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Finn det trigonometriske polynomet $F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$ slik at kvadratfeilen $||F(x) - f(x)||$ på intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$ er minimal, og regn ut denne minimale verdien for $N = 0, \quad 1, \ldots, 5$.

3 K9: 11.6.15. Bevis at rekken under konvergerer mot den oppgitte summen. (Bruk Parsevals identitet)

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Bruk at Fourierrekken til $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$ er

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Eksamensoppgave

4 **a)** La f være en 2π-periodisk funksjon slik at $f(x) = e^{-2x}$ for $-\pi < x < \pi$. Finn den komplekse Fourier-rekken til f.

b) La g være en 2π-periodisk funksjon slik at $g(x) = e^x$ for $-\pi < x < \pi$. Funksjonens komplekse Fourier-rekke har formen

$$g(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - in} e^{inx}$$

Finn summen av rekkene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$