

Innleveringsfrist er **onsdag 20. november, klokken 16.00**. Øvingene leveres til Gard Spreemann, rom 1254, Sentralbygg 2.

Kun de med for **få** godkjente øvinger kan levere øving 13.

Alle oppfordres til å regne gjennom øvingen, da alle øvingene er pensum.

**1** La  $y$  være funksjonen som tilfredsstiller den andre ordens differensialligningen

$$y''(x) - (1 - y^2)y'(x) + y(x) = 0 \quad (*)$$

med initialbetingelser  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$ .

**a)** Skriv om ligning (\*) til et system av første ordens differensialligninger. Hva blir startverdiene for dette systemet?

Vi ønsker å løse systemet av differensialligninger

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

numerisk. Vi har, blant andre metoder, studert Eulers metode for denne typen ligninger. Et alternativ, kjent som «baklengs Euler» er gitt ved

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}), \quad (**)$$

der  $h$  er steglengden og  $x_{n+1} = x_n + h$ . Vi antar at  $\mathbf{y}_n$  er kjent, og (\*\*) brukes for å finne tilnærmelsen  $\mathbf{y}_{n+1}$ . Metoden er *implisitt* siden funksjonen  $\mathbf{f}$  beregnes i den ukjente løsningen  $\mathbf{y}_{n+1}$ . Vi finner denne ved å løse et ikke-lineært ligningssystem.

**b)** La  $h = 0,1$ , og sett opp det ikke-lineære ligningssystemet du får når du ønsker å utføre et skritt med baklengs Euler på systemet du fant i oppgave **a**).

**c)** Gjør én iterasjon med Newtons metode på ligningssystemet

$$\begin{aligned} 10y_1 - y_2 - 20 &= 0 \\ y_1 + (9 + y_1^2)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Bruk  $y_1 = 2$  og  $y_2 = 0$  som startverdier for iterasjonen.

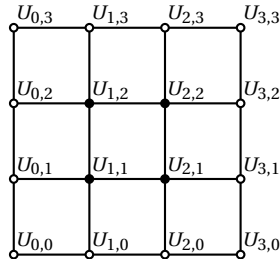
**2** I et anisotrop materiale, der varmekonduktiviteten i  $y$ -retningen er to ganger høyere enn i  $x$ -retningen, tar den stasjonære diffusjonsligningen (varmeligningen) formen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (*)$$

Vi vil løse (\*) numerisk. Området er et kvadrat med sidelengde 1 og randbetingelser gitt ved

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u(0, y) &= 0 \\ u(x, 1) = u(1, y) &= 1, \end{aligned}$$

for  $x, y \in [0, 1]$ . Vi betrakter det følgende gitteret



der  $h = 1/3$  og  $U_{i,j} \approx u(ih, jh)$ .

a) Vis at differenseskjemaet som tilsvarende (\*) er

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + 2U_{i,j+1} + 2U_{i,j-1} - 6U_{i,j} = 0.$$

b) Sett opp systemet som  $U_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2$ ) tilfredstiller og gjør én iterasjon med Gauss-Seidel med startpunktet  $U_{1,1}^{(0)} = U_{2,1}^{(0)} = U_{1,2}^{(0)} = U_{2,2}^{(0)} = 1/2$ .

3 Vi ser på initialverdiproblemet

$$y'(x) = xy(x), \quad y(0) = 1. \quad (*)$$

a) Finn den eksakte løsningen til (\*). Regn ut et steg ved hjelp av Eulers metode med steglengde  $h = 0,1$ .

b) En 3. ordens Runge-Kutta metode er gitt ved

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_2\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3. \end{aligned}$$

Regn ut et steg med denne metoden for initialverdiproblemet (\*) med  $h = 0,1$ . Sammenlign med resultatet med det du fikk i a).

4 Gitt problemet

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} & (t > 0, 0 < x < 1) \\ u(0, t) = u(1, t) = t & (t \geq 0) \\ u(x, 0) = 8x(1-x) & (0 \leq x \leq 1). \end{cases}$$

- a) Sett opp et *eksplicit* differanseskjema for (\*) (som i avsnitt 21.6 i læreboken, men ta hensyn til det ekstra leddet  $u_x$ ).  
La  $h = 1/4$ ,  $k = 1/16$  og finn tilnærmelser til  $u(1/4, 1/16)$ ,  $u(1/2, 1/16)$  og  $u(3/4, 1/16)$ .
- b) Modifiser Crank–Nicolsons metode (avsnitt 21.6 i læreboken) slik at du kan bruke den til å løse (\*). Velg  $h$  og  $k$  som i oppgave a), og sett opp det lineære ligningssystemet som må løses for første skritt.
- c) Utfør to Gauss–Seidel iterasjoner på ligningssystemet fra oppgave b). Bruk initialverdiene  $u(ih, 0)$ ,  $i = 1, 2, 3$  som startverdi på iterasjonene.

- 5 a) Vi vil løse ligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 27(x + y),$$

på enhetskvadratet  $[0, 1] \times [0, 1]$  med randbetingelser

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 3x, \quad u(1, y) = 3y.$$

Finn en tilnærming til løsningen  $u(x, y)$  ved å bruke sentraldifferanser for å approksimere  $u_{xx}$  og  $u_{yy}$ . La  $h = 1/3$  være steglengden, og la gitteret være gitt av punktene  $(x_i, y_j) = (ih, jh)$  for  $i, j = 0, 1, \dots, 3$ . Sett opp et system av ligninger for  $U_{1,1}$ ,  $U_{2,1}$ ,  $U_{1,2}$  og  $U_{2,2}$ , der  $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$ .

- b) Utfør én Gauss–Seidel iterasjon på systemet du fikk i oppgave a). Bruk som startvektor  $\mathbf{x}_0 = -(1, 1, 1, 1)$ .

- 6 Løs integralligningen

$$f(t) = 1 - \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

- 7 La  $0 < a < \pi$  og la  $f$  være en jevn funksjon med periode  $2\pi$  som oppfyller

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{for } a < x \leq \pi. \end{cases}$$

- a) Vis at fourierrekken til  $f$  er

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \cos nx.$$

- b) Finn summen av rekkene

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}, \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2na}{2n}.$$

- 8 a) La  $f$  være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{for } -2 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn den fouriertransformerte til  $f$ .

b) Bruk resultatet fra a) til å beregne

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega.$$

9 I denne oppgaven ser vi på den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

betingelsene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x(x, t) = 0,$$

samt initialbetingelsen

$$u_t(x, 0) = f(x).$$

Funksjonen  $f$  er gitt ved

$$f(x) = g''(x),$$

der  $g$  er en to ganger deriverbar funksjon, og vi antar at de fouriertransformerte til  $f$  og  $g$  eksisterer.

a) Vis at den partielle differensialligningen gitt over kan skrives, ved å anvende fouriertransformasjon, som initialverdiproblemet

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\omega^2 \hat{u}, \quad \hat{u}_t(\omega, 0) = \hat{f}(\omega). \quad (*)$$

b) Ved å fiksure  $\omega$  så kan vi skrive (\*) som den ordinære differensialligningen

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = -\omega^2 \hat{u}, \quad \hat{u}_t(\omega, 0) = \hat{f}(\omega). \quad (**)$$

Vis at (\*\*) har løsning

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{g}(\omega) e^{-\omega^2 t}.$$

c) Vis at løsningen til problemet kan skrives på formen

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-p) h(p, t) dp \quad \text{for } t > 0,$$

og finn  $h(p, t)$ .