TMA4135 Matematikk 4D høsten 2013

Øving 7

1 La a være en positiv konstant. La funksjonene f og g være gitt ved henholdsvis

$$f(t) = e^{at} \text{ for } t \geq 0, \qquad \text{og} \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq t < a \\ e^{at} & \text{for } t > a. \end{cases}$$

Beregn

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

2 La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{for } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Finn fouriercosinusrekken til f.

3 Finn polynomet av lavest mulig grad som interpolerer punktene i datasettet gitt under.

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-1	3	1	-1	3

4 Løs integralligningen

$$f(t) = \cos t + e^{-2t} \int_0^t f(\tau)\, e^{2\tau}\, \mathrm{d}\tau$$

ved hjelp av laplacetransformasjon.

5 Bestem matrisen L slik at $A = LL^T$, der

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

6 Laplacetransformasjonen til f er gitt ved

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s^2+16)}.$$

Finn $f(t)$.

7 Vis at

$$x^3 - 7x + 2 = 0$$

har nøyaktig én løsning i intervallet $[0,1]$. Bestem løsningen.

8 La f være en periodisk funksjon med periode 4, der

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } 0 \leq x < 2, \\ 2 & \text{for } 2 \leq x < 4. \end{cases}$$

Finn den komplekse fourierrekken til f.

9 I denne oppgaven løser vi ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ved hjelp av en iterasjonsmetode som er implementert i `Python`.

```
def iterasjon(x0, y0, z0, n):
    x = x0
    y = y0
    z = z0

    for i in range (0, n):
        x = 1/5.0*(6 + y - 2*z)
        y = 1/4.0*(5 - 2*x + z)
        z = 1/3.0*(4 - x)
    return x,y,z
```

Utfør én iterasjon med startverdiene $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 1/2$ og $z^{(0)} = 2$.

Hvilken metode er implementert? Vil iterasjonene konvergere? Begrunn svaret.

10 La

$$I = \int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x,$$

og la I_S være tilnærmingen til I gitt ved Simpsons regel med steglengde h og $2m$ antall delintervaller. Hvor liten må h og hvor stor må m være for at $|I - I_s| < 10^{-5}$?