NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4135
Eksempel tilhørende forelesning 30. oktober 2014

Det var meningen at forelesningen 30. oktober, den siste innen Fourier-analyse, skulle inneholde et eksempel der PDE-en ikke er en av de vi har studert om igjen og om igjen (bølgeligningen, varmeledningsligningen/diffusjonsligningen og Laplaces ligning). Det ble dog ikke tid til det, så her følger eksempelet.

Fra eksamen sommer 1995

Vi skal studere

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{1}$$

hvor

i. $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$

ii. $u(x,0) = f(x)$, hvor f er en funksjon hvis Fourier-transformerte eksisterer.

Oppgave: Vis at løsningen til ligning (1) kan skrives på formen

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-st)g(s)\,\mathrm{d}s,$$

og finn g.

Kommentar

Vi har altså å gjøre med en PDE vi aldri har sett før. *Fremgangsmåten* som vi benyttet på varmeledningsligningen er likevel et godt utgangspunkt. Moralen er: Ikke bli skremt at nye differensialligninger[1].

Vi skal løse på et område uten render ($x \in \mathbb{R}$), og betingelsene vi har fått roper «Fourier-transformasjon»!

Løsning

Som i forelesning Fourier-transformerer vi ligning (1) med hensyn på første variabel, og får

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) = -\omega^2 t\hat{u}(\omega,t).$$

For hver (fikserte) ω, er dette en ODE med løsning

$$\hat{u}(\omega,t) = K(\omega)e^{-\omega^2 t^2/2}$$

for en ω-avhengig konstant $K(\omega)$. Sett gjerne inn for å sjekke at løsningen stemmer. For å bestemme $K(\omega)$ setter vi $t = 0$, slik at

$$K(\omega) = \hat{u}(\omega,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x = \hat{f}(\omega).$$

Andre og siste likhet er per definisjon av Fourier-transformasjon. Dermed har vi

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-\omega^2 t^2/2}.$$

[1] Dette gjelder selvfølgelig også i tilfellene med randbetingelser.

Invers-transformerer vi med hensyn på første variabel (som i forelesning) finner vi

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega, t) e^{i\omega x}\, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\omega^2 t^2/2} e^{i\omega x}\, \mathrm{d}\omega.$$

Nå holder vi tungen rett i munnen, og setter inn definisjonen av $\hat{f}(\omega)$ (den Fourier-transformerte til f), slik at vi får

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y}\, \mathrm{d}y \right) e^{-\omega^2 t^2/2} e^{i\omega x}\, \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\omega^2 t^2/2} e^{i\omega(x-y)}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

Informasjonen gitt om u er tilstrekkelig til at vi kan bytte integrasjonsrekkefølge. Da finner vi

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\omega^2 t^2/2} e^{i\omega(x-y)}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t^2/2} e^{i\omega(x-y)}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

La h være definert ved

$$h(y) = e^{-ay^2}$$

for alle $a > 0$. Da vet vi fra tidligere i faget at h Fourier-transformerer til

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/(4a)}.$$

Hvis vi velger $a = 1/(2t^2)$, har vi

$$\hat{h}(\omega) = t e^{-\omega^2 t^2/2} \qquad\qquad h(y) = e^{-y^2/(2t^2)}.$$

Legg merke til at $\hat{h}(\omega)/t$ opptrer i uttrykket for $u(x,t)$. Vi har nemlig

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{h}(\omega)}{t} e^{i\omega(x-y)}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega) e^{i\omega(x-y)}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Det innerste integralet her er selve definisjonen av ($\sqrt{2\pi}$ ganger) *den invers-transformerte til $\hat{h}$ evaluert i* $x-y$, altså

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega) e^{i\omega(x-y)}\, \mathrm{d}\omega = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}^{-1}(\hat{h})(x-y) = \sqrt{2\pi} h(x-y) = \sqrt{2\pi} e^{-(x-y)^2/(2t^2)}.$$

Dermed har vi

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/(2t^2)}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{t}\right)^2}\, \mathrm{d}y.$$

Nå begynner vi å nærme oss. La $s = (x-y)/t$. Dette variabelbyttet gir $\mathrm{d}s = -\,\mathrm{d}y/t$ og $y = x - st$, slik at

$$u(x,t) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(x-st) e^{-s^2/2}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-st) e^{-s^2/2}\, \mathrm{d}s.$$

Definerer vi $g(s) = e^{-s^2/2}$, har vi da funnet det oppgaven ba om.