NTNU
Institutt for matematiske fag

Litt om stabilitet av Runge–Kutta-metoder

I forelesning demonstrerte jeg hvordan Eulers metode, en førsteordens Runge–Kutta-metode, oppførte seg under løsing av

$$y'(x) = -3y(x).$$

Med steglengde $h = 1$, så vi en oscillerende oppførsel som aldri roet seg ned, i sterk kontrast med den analytiske løsningen $y(x) = y(0)e^{-3x}$. Vi ser at metoden er *ustabil* for denne ligningen med den gitte steglengde.

En test for stabilitet

En kan si noe om den generelle stabiliteten til Runge–Kutta-metoder ved å studere differensialligningen

$$y'(x) = \lambda y(x), \tag{1}$$

hvor λ er[1] et *kompleks tall* med strengt negativ realdel, altså $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Vi vet at ligning (1) har løsning

$$y(x) = y(0)e^{\lambda x} = y(0)e^{x \operatorname{Re}\lambda} e^{ix \operatorname{Im}\lambda}. \tag{2}$$

Siden $\operatorname{Re}\lambda < 0$, vil den første eksponensialfunksjonen dempe løsningen, så

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

Et mål på stabilitet kan da være at også vår numeriske løsning oppfører seg slik når vi løser ligning (1), altså at

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

I vår sammenheng vil vi si at en metode er *stabil* hvis $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Vi så at i tilfellet $\lambda = -3$ og $h = 1$ er Eulers metode *ikke* stabil.

Litt om stabilitet av Runge–Kutta-metoder

Stabiliteten til alle Runge–Kutta-metodene kan undersøkes innenfor rammeverket diskutert over. I det kommende er $\lambda \in \mathbb{C}$ med $\operatorname{Re}\lambda < 0$, og vi bektrakter ligning (1).

Eulers metode

For ligning (1) blir Eulers metode

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n.$$

Anvendt n ganger, finner vi for $n \geq 0$

$$y_n = (1 + h\lambda)^n y_0.$$

Fra kompleks analyse vet vi at $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, med y_n som over, kun hvis $|1 + h\lambda| < 1$. Dette er oppfyllt hvis og bare hvis $h\lambda$ (som er et kompleks tall) befinner seg i en sirkelskive med radius 1 sentrert i punktet $-1 + 0\mathrm{i}$ i det komplekse plan.

Gitt en λ (med $\operatorname{Re}\lambda < 0$) må vi altså velge oss en h som er liten nok til at $h\lambda$ lander inni nevnte sirkelskive, for at vi skal være garantert stabilitet. Det kan hende vi må velge h svært liten, og dermed gjøre svært mange skritt for å komme oss til den $y_n = y(x_0 + nh)$ vi er interessert i.

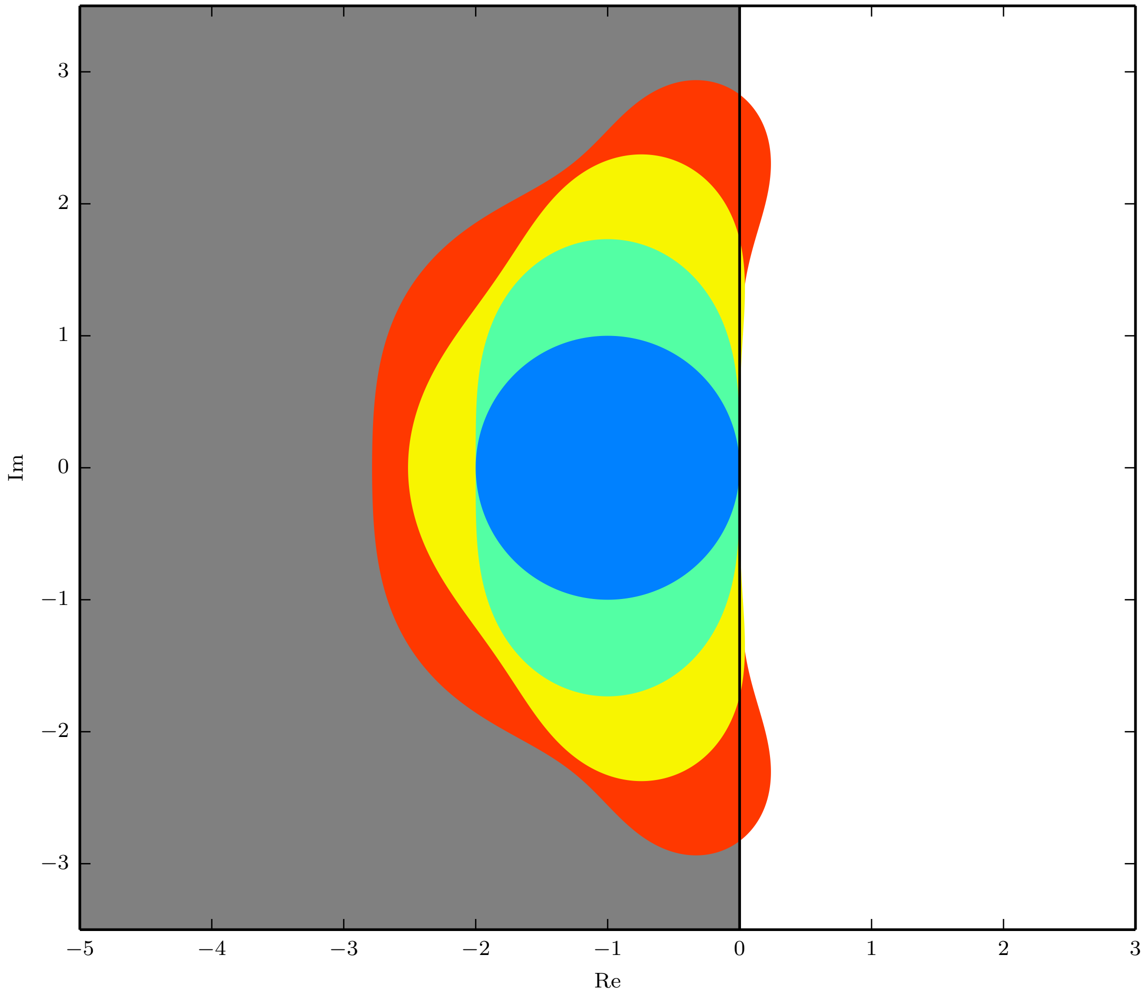
[1] Jeg kalte λ for k i forelesning. Jeg møtte så på en numeriker som mente jeg hadde begått en dødssynd, fordi denne konstanten «på grunn av tradisjon alltid skal hete λ». Jeg tør ikke annet enn å kalle den λ her…

Runge–Kutta-metoder generelt

Betraktningen over kan gjennomføres for alle Runge–Kutta-metodene vi har sett i kurset: Euler, forbedret Euler (Heun), RK4, og baklengs Euler. Figur 1 viser resultatet, altså *stabilitetsområdene* for de forskjellige metodene.

Merk hvordan *baklengs Euler* er stabil for $h\lambda$ i hele det venstre halvplan (grått område i figur 1). Dette kalles *absolutt stabilitet*, og viser at løsning med metoden vil gå mot 0 (som den analytiske løsningen gjør) uansett hvor stor skrittlengde vi velger. Slik stabilitet er typisk for de implisitte metodene.

De andre metodene, som er eksplisitte, har mer begrensede stabilitetsområder. Også her er det forskjeller å merke seg: Dersom λ har realdel svært nær 0 (som korresponderer til at den analytiske løsningen i ligning (2) er veldig sakte avtagende) og har stor imaginærkomponent (som korresponderer til at den analytiske løsningen er veldig oscillerende), så må vi velge h *ekstremt liten* for å havne i Eulers metodes (blått) eller Heuns metodes (turkis) stabilitetsområder. RK4 sitt område (rødt) er dog en del lettere å nå med noe større h.



Figur 1: Stabilitetsområder for noen Runge–Kutta-metoder. Med $h\lambda$ i det **grå området** (hele venstre halvplan) er *baklengs Euler* stabil, i det **røde området** er *RK4* stabil, i det **gule området** er en tredjeordens RK-metode (som vi ikke har sett på) stabil, i det **turkise/grønne området** er *forbedret Euler (Heun)* stabil, og i det **blå området** er *Euler* stabil (som vi nettopp har vist). Merk at i figuren skjuler det røde noe av det grå, det gule noe av det røde, osv.