# TMA4135 Matematikk 4D høsten 2014

## Øving 13

Innleveringsfristen er den samme som for øving 12. Øvingen veiledes ikke.

Kun de med for **få** godkjente øvinger kan levere øving 13.

Alle oppfordres til å regne gjennom øvingen, da alle øvingene er pensum.

**1** La $y$ være funksjonen som tilfredsstiller den andre ordens differensialligningen

$$y''(x) - (1-y^2)y'(x) + y(x) = 0 \qquad (*)$$

med initalbetingelser $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

**a)** Skriv om ligning $(*)$ til et system av første ordens differensialligninger. Hva blir startverdiene for dette systemet?

Vi ønsker å løse systemet av differensialligninger

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}\big(x, \mathbf{y}(x)\big), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

numerisk. Vi har, blant andre metoder, studert Eulers metode for denne typen ligninger. Et alternativ, kjent som «baklengs Euler» er gitt ved

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}), \qquad (**)$$

der $h$ er steglengden og $x_{n+1} = x_n + h$. Vi antar at $\mathbf{y}_n$ er kjent, og $(**)$ brukes for å finne tilnærmelsen $\mathbf{y}_{n+1}$. Metoden er *implisitt* siden funksjonen $\mathbf{f}$ beregnes i den ukjente løsningen $\mathbf{y}_{n+1}$. Vi finner denne ved å løse et ikke-lineært ligningssystem.

**b)** La $h = 0{,}1$, og sett opp det ikke-lineære ligningssystemet du får når du ønsker å utføre et skritt med baklengs Euler på systemet du fant i oppgave **a)**.

**c)** Gjør én iterasjon med Newtons metode på ligningssystemet

$$\begin{aligned} 10y_1 - y_2 - 20 &= 0 \\ y_1 + (9 + y_1^2)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Bruk $y_1 = 2$ og $y_2 = 0$ som startverdier for iterasjonen.

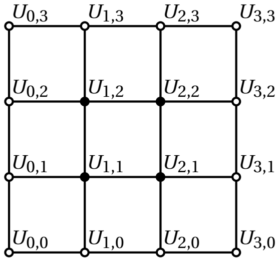
**2** I et anisotropt materiale, der varmekonduktiviteten i $y$-retningen er to ganger høyere enn i $x$-retningen, tar den stasjonære diffusjonsligningen (varmeligningen) formen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (*)$$

Vi vil løse $(*)$ numerisk. Området er et kvadrat med sidelengde 1 og randbetingelser gitt ved

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u(0,y) = 0 \\ u(x,1) &= u(1,y) = 1, \end{aligned}$$

for $x, y \in [0,1]$. Vi betrakter det følgende gitteret




der $h = 1/3$ og $U_{i,j} \approx u(ih, jh)$.

**a)** Vis at differenseskjemaet som tilsvarer $(*)$ er

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + 2U_{i,j+1} + 2U_{i,j-1} - 6U_{i,j} = 0.$$

**b)** Sett opp systemet som $U_{i,j}$ $(i, j = 1,2)$ tilfredstiller og gjør én iterasjon med Gauss–Seidel med startpunktet $U_{1,1}^{(0)} = U_{2,1}^{(0)} = U_{1,2}^{(0)} = U_{2,2}^{(0)} = 1/2$.

**3** Vi ser på initialverdiproblemet

$$y'(x) = xy(x), \quad y(0) = 1. \qquad (*)$$

**a)** Finn den eksakte løsningen til $(*)$. Regn ut et steg ved hjelp av Eulers metode med steglengde $h = 0{,}1$.

**b)** En 3. ordens Runge–Kutta metode er gitt ved

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_2\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3. \end{aligned}$$

Regn ut et steg med denne metoden for initialverdiproblemet $(*)$ med $h = 0{,}1$. Sammenlign med resultatet med det du fikk i **a)**.

**4** Gitt problemet

$$(*) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} & (t > 0,\ 0 < x < 1) \\ u(0,t) = u(1,t) = t & (t \ge 0) \\ u(x,0) = 8x(1-x) & (0 \le x \le 1). \end{cases}$$

**a)** Sett opp et *eksplisitt* differanseskjema for $(*)$ (som i avsnitt 21.6 i læreboken, men ta hensyn til det ekstra leddet $u_x$).
La $h = 1/4$, $k = 1/16$ og finn tilnærmelser til $u(1/4, 1/16)$, $u(1/2, 1/16)$ og $u(3/4, 1/16)$.

**b)** Modifiser Crank–Nicolsons metode (avsnitt 21.6 i læreboken) slik at du kan bruke den til å løse $(*)$. Velg $h$ og $k$ som i oppgave **a)**, og sett opp det lineære ligningssystemet som må løses for første skritt.

**c)** Utfør to Gauss–Seidel iterasjoner på ligningssystemet fra oppgave **b)**. Bruk initialverdiene $u(ih, 0)$, $i = 1, 2, 3$ som startverdi på iterasjonene.

**5** **a)** Vi vil løse ligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 27(x + y),$$

på enhetskvadratet $[0, 1] \times [0, 1]$ med randbetingelser

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 3x, \quad u(1, y) = 3y.$$

Finn en tilnærming til løsningen $u(x, y)$ ved å bruke sentraldifferanser for å approksimere $u_{xx}$ og $u_{yy}$. La $h = 1/3$ være steglengden, og la gitteret være gitt av punktene $(x_i, y_j) = (ih, jh)$ for $i, j = 0, 1, \ldots, 3$. Sett opp et system av ligninger for $U_{1,1}, U_{2,1}, U_{1,2}$ og $U_{2,1}$, der $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$.

**b)** Utfør én Gauss–Seidel iterasjon på systemet du fikk i oppgave **a)**. Bruk som startvektor $\mathbf{x}_0 = -(1, 1, 1, 1)$.

**6** Løs integralligningen

$$f(t) = 1 - \int_0^t (t - \tau) f(\tau)\, d\tau, \quad t > 0.$$

**7** La $0 < a < \pi$ og la $f$ være en jevn funksjon med periode $2\pi$ som oppfyller

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \le x \le a, \\ 0 & \text{for } a < x \le \pi. \end{cases}$$

**a)** Vis at fourierrekken til $f$ er

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \cos nx.$$

**b)** Finn summen av rekkene

$$\text{i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}, \qquad \text{ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2na}{2n}.$$

**8** **a)** La $f$ være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{for } -2 \le x \le 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn den fouriertransformerte til $f$.

**b)** Bruk resultatet fra **a)** til å beregne

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,\mathrm{d}\omega.$$

$\boxed{9}$ I denne oppgaven ser vi på den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

betingelsene

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = \lim_{x\to\pm\infty} u_x(x,t) = 0,$$

samt initialbetingelsen

$$u_t(x,0) = f(x).$$

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = g''(x),$$

der $g$ er en to ganger deriverbar funksjon, og vi antar at de fouriertransformerte til $f$ og $g$ eksisterer.

**a)** Vis at den partielle differensialligningen gitt over kan skrives, ved å anvende fouriertransformasjon, som initialverdiproblemet

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\omega^2\hat{u}, \quad \hat{u}_t(\omega,0) = \hat{f}(\omega). \qquad (*)$$

**b)** Ved å fiksere $\omega$ så kan vi skrive $(*)$ som den ordinære differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} = -\omega^2\hat{u}, \quad \hat{u}_t(\omega,0) = \hat{f}(\omega). \qquad (**)$$

Vis at $(**)$ har løsning

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{g}(\omega)e^{-\omega^2 t}.$$

**c)** Vis at løsningen til problemet kan skrives på formen

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-p)h(p,t)\,\mathrm{d}p \quad \text{for} \quad t > 0,$$

og finn $h(p,t)$.