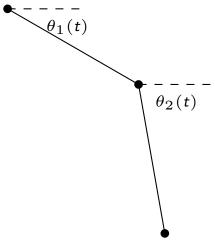
Dobbelpendelen er et tilsynelatende enkelt fysisk system:



Hvert stag har lengde ℓ, og de to massepunktene har masse m.
Systemet påvirkes kun av gravitasjon, med tyngdeakselerasjon g.

Newtons lover gir

$$\theta_1'(t) = \frac{6}{m\ell^2}\frac{2p_1(t) - 3\cos(\theta_1(t)-\theta_2(t))p_2(t)}{16 - 9\cos^2(\theta_1(t)-\theta_2(t))}$$

$$\theta_2'(t) = \frac{6}{m\ell^2}\frac{8p_2(t) - 3\cos(\theta_1(t)-\theta_2(t))p_1(t)}{16 - 9\cos^2(\theta_1(t)-\theta_2(t))}$$

$$p_1'(t) = -\frac{1}{2}m\ell^2\left(\theta_1'(t)\theta_2'(t)\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t)) + 3\frac{g}{\ell}\sin\theta_1(t)\right)$$

$$p_2'(t) = -\frac{1}{2}m\ell^2\left(-\theta_1'(t)\theta_2'(t)\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t)) + \frac{g}{\ell}\sin\theta_2(t)\right)$$

Newtons lover gir

$$\theta_1'(t) = \frac{6}{m\ell^2}\frac{2p_1(t) - 3\cos(\theta_1(t)-\theta_2(t))p_2(t)}{16 - 9\cos^2(\theta_1(t)-\theta_2(t))}$$

$$\theta_2'(t) = \frac{6}{m\ell^2}\frac{8p_2(t) - 3\cos(\theta_1(t)-\theta_2(t))p_1(t)}{16 - 9\cos^2(\theta_1(t)-\theta_2(t))}$$

$$p_1'(t) = -\frac{1}{2}m\ell^2\left(\theta_1'(t)\theta_2'(t)\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t)) + 3\frac{g}{\ell}\sin\theta_1(t)\right)$$

$$p_2'(t) = -\frac{1}{2}m\ell^2\left(-\theta_1'(t)\theta_2'(t)\sin(\theta_1(t)-\theta_2(t)) + \frac{g}{\ell}\sin\theta_2(t)\right)$$

og systemets bevegelse er altså fullstendig bestemt av

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

med $\mathbf{f}$ som over og

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\\ p_1(t)\\ p_2(t)\end{pmatrix}.$$

Rotet på forrige slide er selvfølgelig umulig å løse analytisk. Men det utgjør et system av førsteordens ordinære differensialligninger. Vi kan derfor bruke RK4:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}\left(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4\right)$$

hvor

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}\left(t_n, \mathbf{y}_n\right) \\
\mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}\left(t_n + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right) \\
\mathbf{k}_3 &= h\mathbf{f}\left(t_n + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right) \\
\mathbf{k}_4 &= h\mathbf{f}\left(t_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3\right)
\end{aligned}$$

(Video av løsning)