TMA 4140 Diskret Matematikk, 2. forelesning

Haaken Annfelt Moe

Department of Mathematical Sciences
Norwegian University of Science and Technology (NTNU)

September 2, 2011

Outline

Outline

1. Generell informasjon
2. Repetisjon
3. 1.3 Predikater og kvantorer
4. 1.4 Nøstede kvantorer
5. 1.5 Slutningsregler

Midtsemesterprøve

- Midtsemesterprøve blir onsdag 12. Oktober, 17.45-18.45, samme tid som øvingsforelesningene. Sted er ikke avklart ennå.

Outline

Repetisjon fra 1.1, 1.2

- En proposisjon er en deklarativ setning som en enten er sann eller usann.

Repetisjon fra 1.1, 1.2

- En proposisjon er en deklarativ setning som en enten er sann eller usann.
- Sannhetsverdien til en proposisjon er **T** (true/sann) eller **F** (false/usann). Representeres ofte med 0 (usann) og 1 (sann).

Repetisjon fra 1.1, 1.2

- En proposisjon er en deklarativ setning som en enten er sann eller usann.
- Sannhetsverdien til en proposisjon er **T** (true/sann) eller **F** (false/usann). Representeres ofte med 0 (usann) og 1 (sann).
- Proposisjoner dannet med eksisterende proposisjoner og operatorer (f.eks $\neg$) kalles sammensatte proposisjoner.

Repetisjon fra 1.1, 1.2

- En proposisjon er en deklarativ setning som en enten er sann eller usann.
- Sannhetsverdien til en proposisjon er **T** (true/sann) eller **F** (false/usann). Representeres ofte med 0 (usann) og 1 (sann).
- Proposisjoner dannet med eksisterende proposisjoner og operatorer (f.eks $\neg$) kalles sammensatte proposisjoner.
- Operatorer som brukes til å danne sammensatte proposisjoner er $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus$. Vi definerte disse ved bruk av sannhetsverditabeller.

Repetisjon fra 1.2, 1.3

- En tautologi er en proposisjon som alltid er sann, en kontradiksjon er en proposisjon som aldri er sann.

Repetisjon fra 1.2, 1.3

- En tautologi er en proposisjon som alltid er sann, en kontradiksjon er en proposisjon som aldri er sann.
- To proposisjoner er logisk ekvivalente, $\Leftrightarrow$, om de alltid tar samme sannhetsverdi. Sett fra et logikk-synspunkt er disse to proposisjonene 'like'.

Repetisjon fra 1.2, 1.3

- En tautologi er en proposisjon som alltid er sann, en kontradiksjon er en proposisjon som aldri er sann.
- To proposisjoner er logisk ekvivalente, $\Leftrightarrow$, om de alltid tar samme sannhetsverdi. Sett fra et logikk-synspunkt er disse to proposisjonene 'like'.
- En proposisjonell funksjon er en funksjon som tar en bestemt sannhetsverdi avhengig av verdien på en eller flere sannhetsverdier.

Repetisjon fra 1.2, 1.3

- En tautologi er en proposisjon som alltid er sann, en kontradiksjon er en proposisjon som aldri er sann.
- To proposisjoner er logisk ekvivalente, $\Leftrightarrow$, om de alltid tar samme sannhetsverdi. Sett fra et logikk-synspunkt er disse to proposisjonene ’like’.
- En proposisjonell funksjon er en funksjon som tar en bestemt sannhetsverdi avhengig av verdien på en eller flere sannhetsverdier.
- Systemspesifikasjon.

Outline

Predikater

Utsagn som $x < 7$ og $x - y = 5$ er ikke sanne eller gale før det er bestemt verdier for x og y. Dvs de *får* en sannhetsverdi som varierer ettersom hva x og y er.

Predikater

Utsagn som $x < 7$ og $x - y = 5$ er ikke sanne eller gale før det er bestemt verdier for x og y. Dvs de *får* en sannhetsverdi som varierer ettersom hva x og y er.

Definition (Proposisjonell funksjon)

Et utsagn $P(x_1, x_2, \ldots)$ som er enten sant eller usant avhengig av verdien på variablene $x_1, x_2, \ldots$ kalles en proposisjonell funksjon.

Predikater

Utsagn som $x < 7$ og $x - y = 5$ er ikke sanne eller gale før det er bestemt verdier for x og y. Dvs de *får* en sannhetsverdi som varierer ettersom hva x og y er.

Definition (Proposisjonell funksjon)

Et utsagn $P(x_1, x_2, \ldots)$ som er enten sant eller usant avhengig av verdien på variablene $x_1, x_2, \ldots$ kalles en proposisjonell funksjon.

Det som skal oppfylles, som < 7, kalles predikatet.

Predikater

Utsagn som $x < 7$ og $x - y = 5$ er ikke sanne eller gale før det er bestemt verdier for x og y. Dvs de *får* en sannhetsverdi som varierer ettersom hva x og y er.

Definition (Proposisjonell funksjon)

Et utsagn $P(x_1, x_2, \ldots)$ som er enten sant eller usant avhengig av verdien på variablene $x_1, x_2, \ldots$ kalles en proposisjonell funksjon.

Det som skal oppfylles, som $<$ 7, kalles predikatet.

Hvis vi bestemmer at variablene tar verdier fra en bestemt samling $\mathcal{U}$, et univers, kan man spørre hvordan predikatet oppfører seg på hele universet.

Kvantorer

Definition (Allkvantor)

Den universelle kvantifiseringen av $P(x)$, $\forall x P(x)$, er proposisjonen '$P(x)$ er sann for alle x fra $\mathcal{U}$'.

Kvantorer

Definition (Allkvantor)

Den universelle kvantifiseringen av $P(x)$, $\forall x P(x)$, er proposisjonen '$P(x)$ er sann for alle x fra $\mathcal{U}$'.

Definition (Eksistenskvantor)

Den eksistensielle kvantifiseringen av $P(x)$, $\exists x P(x)$, er proposisjonen 'det finnes minst en x i $\mathcal{U}$ slik at $P(x)$ er sann'.

Kvantorer

Definition (Allkvantor)

Den universelle kvantifiseringen av $P(x)$, $\forall x P(x)$, er proposisjonen '$P(x)$ er sann for alle x fra $\mathcal{U}$'.

Definition (Eksistenskvantor)

Den eksistensielle kvantifiseringen av $P(x)$, $\exists x P(x)$, er proposisjonen 'det finnes minst en x i $\mathcal{U}$ slik at $P(x)$ er sann'.

I et utsagn med variabler sier vi at en variabel er bundet hvis den er kvantifisert og at den er fri hvis den ikke er kvantifisert.

Kvantorer

Definition (Allkvantor)

Den universelle kvantifiseringen av $P(x)$, $\forall x P(x)$, er proposisjonen '$P(x)$ er sann for alle x fra $\mathcal{U}$'.

Definition (Eksistenskvantor)

Den eksistensielle kvantifiseringen av $P(x)$, $\exists x P(x)$, er proposisjonen 'det finnes minst en x i $\mathcal{U}$ slik at $P(x)$ er sann'.

I et utsagn med variabler sier vi at en variabel er bundet hvis den er kvantifisert og at den er fri hvis den ikke er kvantifisert.

Merk at en proposisjonell funksjon kun er en proposisjon hvis alle variablene er bundet.

Mer om kvantorer

- Hvis vi negerer kvantorer får vi DeMorgans lover for kvantorer.

Mer om kvantorer

- Hvis vi negerer kvantorer får vi DeMorgans lover for kvantorer.

  Vi har disse to logiske ekvivalensene:

$$\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$
$$\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

Mer om kvantorer

- Hvis vi negerer kvantorer får vi DeMorgans lover for kvantorer.

  Vi har disse to logiske ekvivalensene:

$$\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$
$$\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

- Oversette fra dagligspråk til kvantifiserte utsagn.

Outline

Nøstede kvantorer

To kvantorer er nøstet hvis variablene deres på en eller annen måte påvirker hverandre.

Nøstede kvantorer

To kvantorer er nøstet hvis variablene deres på en eller annen måte påvirker hverandre.

Merk: $\forall x \exists y P(x, y)$ er ikke det samme som $\exists x \forall y P)x, y)$.

Outline

Slutningsregler

Definition (Teorem)

Et teorem er et utsagn som kan vises å måtte være sant.

Slutningsregler

Definition (Teorem)

Et teorem er et utsagn som kan vises å måtte være sant.

Hva betyr det å vise at noe er sant? At det kan konkluderes fra *premissene* via gyldig argumentasjon.

Slutningsregler

Definition (Teorem)

Et teorem er et utsagn som kan vises å måtte være sant.

Hva betyr det å vise at noe er sant? At det kan konkluderes fra *premissene* via gyldig argumentasjon.

Definition (Gyldig argumentasjon)

En argumentasjon er gyldig hvis når hypotesene er sanne må konklusjonen være sann.

Slutningsregler

Definition (Teorem)

Et teorem er et utsagn som kan vises å måtte være sant.

Hva betyr det å vise at noe er sant? At det kan konkluderes fra *premissene* via gyldig argumentasjon.

Definition (Gyldig argumentasjon)

En argumentasjon er gyldig hvis når hypotesene er sanne må konklusjonen være sann.

Til dette har vi slutningsregler (side 66 i boka).

Slutningsregler

Definition (Teorem)

Et teorem er et utsagn som kan vises å måtte være sant.

Hva betyr det å vise at noe er sant? At det kan konkluderes fra *premissene* via gyldig argumentasjon.

Definition (Gyldig argumentasjon)

En argumentasjon er gyldig hvis når hypotesene er sanne må konklusjonen være sann.

Til dette har vi slutningsregler (side 66 i boka).

Tre måter å vise at $p \to q$, en implikasjon, er sann:

- Direkte
- Indirekte
- Motsigelse

Neste gang:

Avsnitt 2.1 og 2.2, kanskje litt av 2.3. Vi sees!