TMA 4140 Diskret Matematikk, 3. forelesning

Haaken Annfelt Moe

Department of Mathematical Sciences
Norwegian University of Science and Technology (NTNU)

September 5, 2011

Outline

Outline

Repetisjon fra 1.3

- Et utsagn $P(x_1, x_2, \ldots)$ som er enten sant eller usant avhengig av verdien på variablene $x_1, x_2, \ldots$ kalles en proposisjonell funksjon.

Repetisjon fra 1.3

- Et utsagn $P(x_1, x_2, \ldots)$ som er enten sant eller usant avhengig av verdien på variablene $x_1, x_2, \ldots$ kalles en proposisjonell funksjon.
- Hvis vi bestemmer at variablene tar verdier fra en bestemt samling $\mathcal{U}$, et univers, kan man spørre hvordan predikatet oppfører seg på hele universet.

Repetisjon fra 1.3

- Et utsagn $P(x_1, x_2, \ldots)$ som er enten sant eller usant avhengig av verdien på variablene $x_1, x_2, \ldots$ kalles en proposisjonell funksjon.
- Hvis vi bestemmer at variablene tar verdier fra en bestemt samling $\mathcal{U}$, et univers, kan man spørre hvordan predikatet oppfører seg på hele universet.
- Den universelle kvantifiseringen av $P(x)$, $\forall x\ P(x)$, er proposisjonen '$P(x)$ er sann for alle x fra $\mathcal{U}$'.

Repetisjon fra 1.3

- Et utsagn $P(x_1, x_2, \ldots)$ som er enten sant eller usant avhengig av verdien på variablene $x_1, x_2, \ldots$ kalles en proposisjonell funksjon.
- Hvis vi bestemmer at variablene tar verdier fra en bestemt samling $\mathcal{U}$, et univers, kan man spørre hvordan predikatet oppfører seg på hele universet.
- Den universelle kvantifiseringen av $P(x)$, $\forall x\ P(x)$, er proposisjonen '$P(x)$ er sann for alle x fra $\mathcal{U}$'.
- Den eksistensielle kvantifiseringen av $P(x)$, $\exists x\ P(x)$, er proposisjonen 'det finnes minst en x i $\mathcal{U}$ slik at $P(x)$ er sann'.

Repetisjon fra 1.3

- Et utsagn $P(x_1, x_2, \ldots)$ som er enten sant eller usant avhengig av verdien på variablene $x_1, x_2, \ldots$ kalles en proposisjonell funksjon.
- Hvis vi bestemmer at variablene tar verdier fra en bestemt samling $\mathcal{U}$, et univers, kan man spørre hvordan predikatet oppfører seg på hele universet.
- Den universelle kvantifiseringen av $P(x)$, $\forall x\ P(x)$, er proposisjonen '$P(x)$ er sann for alle x fra $\mathcal{U}$'.
- Den eksistensielle kvantifiseringen av $P(x)$, $\exists x\ P(x)$, er proposisjonen 'det finnes minst en x i $\mathcal{U}$ slik at $P(x)$ er sann'.
- En proposisjonell funksjon hvor alle variablene er bundet blir en proposisjon hvor sannhetsverdien vil variere med valg av univers.

Repetisjon fra 1.3

- Et utsagn $P(x_1, x_2, \ldots)$ som er enten sant eller usant avhengig av verdien på variablene $x_1, x_2, \ldots$ kalles en proposisjonell funksjon.
- Hvis vi bestemmer at variablene tar verdier fra en bestemt samling $\mathcal{U}$, et univers, kan man spørre hvordan predikatet oppfører seg på hele universet.
- Den universelle kvantifiseringen av $P(x)$, $\forall x\, P(x)$, er proposisjonen '$P(x)$ er sann for alle x fra $\mathcal{U}$'.
- Den eksistensielle kvantifiseringen av $P(x)$, $\exists x\, P(x)$, er proposisjonen 'det finnes minst en x i $\mathcal{U}$ slik at $P(x)$ er sann'.
- En proposisjonell funksjon hvor alle variablene er bundet blir en proposisjon hvor sannhetsverdien vil variere med valg av univers.
- Logiske ekvivalenser for kvantifiserte utsagn: DeMorgans lover.

Repetisjon fra 1.4 og 1.5

- Nøstede kvantorer: $\forall x \; \exists y \; P(x, y)$ er ikke det samme som $\exists x \; \forall y \; P(x, y)$.

Repetisjon fra 1.4 og 1.5

- Nøstede kvantorer: $\forall x \, \exists y \, P(x, y)$ er ikke det samme som $\exists x \, \forall y \, P(x, y)$.
- Et teorem er et utsagn som kan vises å måtte være sant.

Repetisjon fra 1.4 og 1.5

- Nøstede kvantorer: $\forall x \; \exists y \; P(x, y)$ er ikke det samme som $\exists x \; \forall y \; P(x, y)$.
- Et teorem er et utsagn som kan vises å måtte være sant.
- En argumentasjon er gyldig hvis når hypotesene er sanne må konklusjonen være sann.

Repetisjon fra 1.4 og 1.5

- Nøstede kvantorer: $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ er ikke det samme som $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$.
- Et teorem er et utsagn som kan vises å måtte være sant.
- En argumentasjon er gyldig hvis når hypotesene er sanne må konklusjonen være sann.
- En argumentasjon er gyldig hvis den følger slutningsregler.

Repetisjon fra 1.4 og 1.5

- Nøstede kvantorer: $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ er ikke det samme som $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$.
- Et teorem er et utsagn som kan vises å måtte være sant.
- En argumentasjon er gyldig hvis når hypotesene er sanne må konklusjonen være sann.
- En argumentasjon er gyldig hvis den følger slutningsregler.
- (Tre måter å vise at $p \to q$, en implikasjon, er sann. Glem dette, ikke pensum.)

Outline

Mengder

Definition (Mengde, Element)

En mengde er en ikke ordnet (dvs uten rekkefølge) samling av objekter. Objektene i mengden kalles elementene.

Mengder

Definition (Mengde, Element)

En mengde er en ikke ordnet (dvs uten rekkefølge) samling av objekter. Objektene i mengden kalles elementene.

Mengden sies å inneholde elementene sine, og om A er en mengde og a et element i A, skriver vi $a \in A$. Dersom a ikke ligger i A kan dette skrives $a \notin A$.

Mengder

Definition (Mengde, Element)

En mengde er en ikke ordnet (dvs uten rekkefølge) samling av objekter. Objektene i mengden kalles elementene.

Mengden sies å inneholde elementene sine, og om A er en mengde og a et element i A, skriver vi $a \in A$. Dersom a ikke ligger i A kan dette skrives $a \notin A$.

Notasjon:

- $\{a, b, c, d\}$
- $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- $\{x | x \text{ er et oddetall mindre enn } 100\}$.

Mengder

Definition (Likhet)

To mengder A og B er like, $A = B$, om A og B inneholder de samme elementene.

Mengder

Definition (Likhet)

To mengder A og B er like, $A = B$, om A og B inneholder de samme elementene.

Det finnes også en 'geometrisk' representasjon av mengder, Venn-diagram.

Mengder

Definition (Likhet)

To mengder A og B er like, $A = B$, om A og B inneholder de samme elementene.

Det finnes også en 'geometrisk' representasjon av mengder, Venn-diagram.

Definition (Den tomme mengden)

Den tomme mengden, $\emptyset$, er den unike mengden som ikke har noen elementer.

Mer om mengder

Definition (Undermengder)

Vi sier at A er en undermengde av B, $A \subseteq B$ hvis og bare hvis alle elementene i A også finnes i B. Hvis i tillegg $A \neq B$, så sier vi at A er en ekte undermengde av B, $A \subset B$.

Mer om mengder

Definition (Undermengder)

Vi sier at A er en undermengde av B, $A \subseteq B$ hvis og bare hvis alle elementene i A også finnes i B. Hvis i tillegg $A \neq B$, så sier vi at A er en ekte undermengde av B, $A \subset B$.

Theorem

For alle mengder S så er:

$$1)\ \emptyset \subseteq S \qquad\qquad 2)\ S \subseteq S.$$

Mer om mengder

Definition (Undermengder)

Vi sier at A er en undermengde av B, $A \subseteq B$ hvis og bare hvis alle elementene i A også finnes i B. Hvis i tillegg $A \neq B$, så sier vi at A er en ekte undermengde av B, $A \subset B$.

Theorem

For alle mengder S så er:

$$1)\ \emptyset \subseteq S \qquad\qquad 2)\ S \subseteq S.$$

Definition (Størrelse på mengder)

For en mengde S så er $|S|$ antallet elementer i S, kardinaliteten til S. Hvis $|S|$ er et heltall så sier vi at S er endelig, hvis ikke er S uendelig.

Mer om mengder

Definition (Potensmengde)

Gitt en mengde S så er potensmengden til S, $\mathcal{P}(S)$, alle undermengdene til S.

Mer om mengder

Definition (Potensmengde)

Gitt en mengde S så er potensmengden til S, $\mathcal{P}(S)$, alle undermengdene til S.

Definition (Ordnede tupler)

Et ordnet n-tuppel, $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ er en ordnet samling som har a_1 som første element, a_2 som andre element, osv.

Mer om mengder

Definition (Potensmengde)

Gitt en mengde S så er potensmengden til S, $\mathcal{P}(S)$, alle undermengdene til S.

Definition (Ordnede tupler)

Et ordnet n-tuppel, $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ er en ordnet samling som har a_1 som første element, a_2 som andre element, osv.

To n-tupler $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ og $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ er like hvis og bare hvis $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

Mer om mengder

Definition (Potensmengde)

Gitt en mengde S så er potensmengden til S, $\mathcal{P}(S)$, alle undermengdene til S.

Definition (Ordnede tupler)

Et ordnet n-tuppel, $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ er en ordnet samling som har a_1 som første element, a_2 som andre element, osv.

To n-tupler $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ og $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ er like hvis og bare hvis $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

Forskjellen på n-tupler og mengder med kardinalitet n er at for n-tupler har elementene en rekkefølge.

Mer om mengder

Definition (Potensmengde)

Gitt en mengde S så er potensmengden til S, $\mathcal{P}(S)$, alle undermengdene til S.

Definition (Ordnede tupler)

Et ordnet n-tuppel, $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ er en ordnet samling som har a_1 som første element, a_2 som andre element, osv.

To n-tupler $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ og $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ er like hvis og bare hvis $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

Forskjellen på n-tupler og mengder med kardinalitet n er at for n-tupler har elementene en rekkefølge.

Et ordnet 2-tuppel kalles et ordnet par.

Kartesisk produkt

Definition (Kartesisk produkt)

Med to mengder A og B er det Kartesiske produkt av A og B, $A \times B$ mengden

$$\{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Kartesisk produkt

Definition (Kartesisk produkt)

Med to mengder A og B er det Kartesiske produkt av A og B, $A \times B$ mengden

$$\{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Definition (Kartesisk produkt, flere mengder)

Det Kartesiske produkt av $A_1, A_2, \ldots A_n$, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ er mengden

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Outline

Mengdeoperasjoner

La A og B være to mengder:

- Unionen av A og B, $A \cup B$ er mengden som inneholder alle elementene som er i A eller B.

Mengdeoperasjoner

La A og B være to mengder:

- Unionen av A og B, $A \cup B$ er mengden som inneholder alle elementene som er i A eller B.
- Snittet av A og B, $A \cap B$ er mengden som inneholder alle elementene som bare er i både A og B.

Mengdeoperasjoner

La A og B være to mengder:

- Unionen av A og B, $A \cup B$ er mengden som inneholder alle elementene som er i A eller B.
- Snittet av A og B, $A \cap B$ er mengden som inneholder alle elementene som bare er i både A og B.
- A og B kalles disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$

Mengdeoperasjoner

La A og B være to mengder:

- Unionen av A og B, $A \cup B$ er mengden som inneholder alle elementene som er i A eller B.
- Snittet av A og B, $A \cap B$ er mengden som inneholder alle elementene som bare er i både A og B.
- A og B kalles disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$
- Differansen av A og B, $A \setminus B$, er mengden som består av de elementene som er i A som ikke er i B. **NB**: $A \setminus B$ er ikke nødvendigvis lik $B \setminus A$

Mengdeoperasjoner

La A og B være to mengder:

- Unionen av A og B, $A \cup B$ er mengden som inneholder alle elementene som er i A eller B.
- Snittet av A og B, $A \cap B$ er mengden som inneholder alle elementene som bare er i både A og B.
- A og B kalles disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$
- Differansen av A og B, $A \setminus B$, er mengden som består av de elementene som er i A som ikke er i B. **NB**: $A \setminus B$ er ikke nødvendigvis lik $B \setminus A$
- Hvis vi har en universell mengde $\mathcal{U}$, så er komplementet til A, $\overline{A}$, de elementene i $\mathcal{U}$ som ikke ligger i A.

Hvordan vise at to mengder er like?

Hvordan vise at to mengde A og B er like?

- $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.

Hvordan vise at to mengder er like?

Hvordan vise at to mengde A og B er like?

- $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.
- Medlemsskapstabeller.

Hvordan vise at to mengder er like?

Hvordan vise at to mengde A og B er like?

- $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.
- Medlemsskapstabeller.
- Logiske ekvivalenser.

Hvordan vise at to mengder er like?

Hvordan vise at to mengde A og B er like?

- $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.
- Medlemsskapstabeller.
- Logiske ekvivalenser.
- Mengdeidentiteter.

Hvordan vise at to mengder er like?

Hvordan vise at to mengde A og B er like?

- $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.
- Medlemsskapstabeller.
- Logiske ekvivalenser.
- Mengdeidentiteter.

Definition (Union/snitt av flere mengder)

Gitt en samling mengder $A_1, \ldots, A_n$ så er unionen/snittet av disse mengden som består av alle de elementene som finnes i minst en/i hver eneste en av disse mengdene. Vi skriver henholdsvis $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ og $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ for unionen og snittet.

Neste gang:

Avsnitt 2.3 og 2.4. Vi sees!