TMA 4140 Diskret Matematikk, 4. forelesning

Haaken Annfelt Moe

Department of Mathematical Sciences
Norwegian University of Science and Technology (NTNU)

September 9, 2011

Outline

Outline

Repetisjon fra 2.1

- En mengde er en ikke ordnet (dvs uten rekkefølge) samling av objekter. Objektene i mengden kalles elementene.

Repetisjon fra 2.1

- En mengde er en ikke ordnet (dvs uten rekkefølge) samling av objekter. Objektene i mengden kalles elementene.
- To mengder A og B er like, $A = B$, om A og B inneholder de samme elementene.

Repetisjon fra 2.1

- En mengde er en ikke ordnet (dvs uten rekkefølge) samling av objekter. Objektene i mengden kalles elementene.
- To mengder A og B er like, $A = B$, om A og B inneholder de samme elementene.
- Den tomme mengden, $\emptyset$, er den unike mengden som ikke har noen elementer.

Repetisjon fra 2.1

- En mengde er en ikke ordnet (dvs uten rekkefølge) samling av objekter. Objektene i mengden kalles elementene.
- To mengder A og B er like, $A = B$, om A og B inneholder de samme elementene.
- Den tomme mengden, $\emptyset$, er den unike mengden som ikke har noen elementer.
- Vi sier at A er en undermengde av B, $A \subseteq B$ hvis og bare hvis alle elementene i A også finnes i B. Hvis i tillegg $A \neq B$, så sier vi at A er en ekte undermengde av B, $A \subset B$.

Repetisjon fra 2.1

- En mengde er en ikke ordnet (dvs uten rekkefølge) samling av objekter. Objektene i mengden kalles elementene.
- To mengder A og B er like, $A = B$, om A og B inneholder de samme elementene.
- Den tomme mengden, $\emptyset$, er den unike mengden som ikke har noen elementer.
- Vi sier at A er en undermengde av B, $A \subseteq B$ hvis og bare hvis alle elementene i A også finnes i B. Hvis i tillegg $A \neq B$, så sier vi at A er en ekte undermengde av B, $A \subset B$.
- For en mengde S så er $|S|$ antallet elementer i S, kardinaliteten til S. Hvis $|S|$ er et heltall så sier vi at S er endelig, hvis ikke er S uendelig.

Repetisjon fra 2.1

- En mengde er en ikke ordnet (dvs uten rekkefølge) samling av objekter. Objektene i mengden kalles elementene.
- To mengder A og B er like, $A = B$, om A og B inneholder de samme elementene.
- Den tomme mengden, $\emptyset$, er den unike mengden som ikke har noen elementer.
- Vi sier at A er en undermengde av B, $A \subseteq B$ hvis og bare hvis alle elementene i A også finnes i B. Hvis i tillegg $A \neq B$, så sier vi at A er en ekte undermengde av B, $A \subset B$.
- For en mengde S så er $|S|$ antallet elementer i S, kardinaliteten til S. Hvis $|S|$ er et heltall så sier vi at S er endelig, hvis ikke er S uendelig.
- Gitt en mengde S så er potensmengden til S, $\mathcal{P}(S)$, alle undermengdene til S.

Repetisjon fra 2.1

- Et ordnet n-tuppel, $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ er en ordnet samling som har a_1 som første element, a_2 som andre element, osv.

Repetisjon fra 2.1

- Et ordnet n-tuppel, $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ er en ordnet samling som har a_1 som første element, a_2 som andre element, osv.
- Det Kartesiske produkt av $A_1, A_2, \ldots A_n$, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ er mengden

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Repetisjon fra 2.2

- Unionen av A og B, $A \cup B$ er mengden som inneholder alle elementene som er i A eller B.

Repetisjon fra 2.2

- Unionen av A og B, $A \cup B$ er mengden som inneholder alle elementene som er i A eller B.
- Snittet av A og B, $A \cap B$ er mengden som inneholder alle elementene som bare er i både A og B.

Repetisjon fra 2.2

- Unionen av A og B, $A \cup B$ er mengden som inneholder alle elementene som er i A eller B.
- Snittet av A og B, $A \cap B$ er mengden som inneholder alle elementene som bare er i både A og B.
- A og B kalles disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$

Repetisjon fra 2.2

- Unionen av A og B, $A \cup B$ er mengden som inneholder alle elementene som er i A eller B.
- Snittet av A og B, $A \cap B$ er mengden som inneholder alle elementene som bare er i både A og B.
- A og B kalles disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$
- Differansen av A og B, $A \setminus B$, er mengden som består av de elementene som er i A som ikke er i B. **NB**: $A \setminus B$ er ikke nødvendigvis lik $B \setminus A$

Repetisjon fra 2.2

- Unionen av A og B, $A \cup B$ er mengden som inneholder alle elementene som er i A eller B.
- Snittet av A og B, $A \cap B$ er mengden som inneholder alle elementene som bare er i både A og B.
- A og B kalles disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$
- Differansen av A og B, $A \setminus B$, er mengden som består av de elementene som er i A som ikke er i B. **NB**: $A \setminus B$ er ikke nødvendigvis lik $B \setminus A$
- Hvis vi har en universell mengde $\mathcal{U}$, så er komplementet til A, $\overline{A}$, de elementene i $\mathcal{U}$ som ikke ligger i A.

Repetisjon fra 2.2

- Unionen av A og B, $A \cup B$ er mengden som inneholder alle elementene som er i A eller B.
- Snittet av A og B, $A \cap B$ er mengden som inneholder alle elementene som bare er i både A og B.
- A og B kalles disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$
- Differansen av A og B, $A \setminus B$, er mengden som består av de elementene som er i A som ikke er i B. **NB**: $A \setminus B$ er ikke nødvendigvis lik $B \setminus A$
- Hvis vi har en universell mengde $\mathcal{U}$, så er komplementet til A, $\overline{A}$, de elementene i $\mathcal{U}$ som ikke ligger i A.
- Hvordan vise at to mengde A og B er like?
  - $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.
  - Medlemsskapstabeller.
  - Logiske ekvivalenser.
  - Mengdeidentiteter.

Outline

Funksjoner

En funksjon er en regel som kobler sammen elementene i to mengder.

Funksjoner

En funksjon er en regel som kobler sammen elementene i to mengder.

Definition (Funksjon)

La A og B være ikke-tomme mengder En funksjon f fra A til B, $f : A \to B$, er en tilordning av nøyaktig ett element i B til hver element i A. Vi skriver $f(a) = b$ om b er det elementet i B som f tilordner til a.

Funksjoner

En funksjon er en regel som kobler sammen elementene i to mengder.

Definition (Funksjon)

La A og B være ikke-tomme mengder En funksjon f fra A til B, $f : A \to B$, er en tilordning av nøyaktig ett element i B til hver element i A. Vi skriver $f(a) = b$ om b er det elementet i B som f tilordner til a.

Definition (Definisjonsmengde, verdimengde)

Hvis $f : A \to B$ kaller vi A definisjonsmengden til f og B verdimengden til f.

Funksjoner

En funksjon er en regel som kobler sammen elementene i to mengder.

Definition (Funksjon)

La A og B være ikke-tomme mengder En funksjon f fra A til B, $f : A \to B$, er en tilordning av nøyaktig ett element i B til hver element i A. Vi skriver $f(a) = b$ om b er det elementet i B som f tilordner til a.

Definition (Definisjonsmengde, verdimengde)

Hvis $f : A \to B$ kaller vi A definisjonsmengden til f og B verdimengden til f.

Definition (Bilde)

Igjen, anta $f : A \to B$. Hvis $a \in A$ så er bildet av a $f(a) = b$. Tilsvarende, hvis $S \subseteq A$ så er mengden $\{f(s) | s \in S\}$ bildet av S. Vi kaller $f(A)$ for bildet til f.

Fortsatt funksjoner

Definition (Sum og multiplikasjon)

Hvis $f : A \to \mathbb{R}$ og $g : A \to \mathbb{R}$, og kan vi definere nye funksjoner ($a \in A$):

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$
$$(fg)(a) = f(a) \cdot g(a)$$

NB: Dette kan defineres *fordi* addisjon og multiplikasjon allerede er definert på $\mathbb{R}$.

Fortsatt funksjoner

Definition (Sum og multiplikasjon)

Hvis $f : A \to \mathbb{R}$ og $g : A \to \mathbb{R}$, og kan vi definere nye funksjoner ($a \in A$):

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$
$$(fg)(a) = f(a) \cdot g(a)$$

NB: Dette kan defineres *fordi* addisjon og multiplikasjon allerede er definert på $\mathbb{R}$.

Definition (En-til-en)

En funksjon $f : A \to B$ er en-til-en, også kalt en injeksjon, hvis $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ for alle x, y i definisjonsmengden til f.

Guess what, ennå mer om funksjoner

Definition (Økende/avtagende funksjon)

En funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er strengt økende (alt strengt avtagende) hvis $f(x) < f(y)$ (alt $f(x) > f(y)$) når $x < y$.

NB: Igjen kan dette defineres fordi det er noe spesielt med mengden $\mathbb{R}$: vi har en bestemt rekkefølge på elementene i $\mathbb{R}$.

Guess what, ennå mer om funksjoner

Definition (Økende/avtagende funksjon)

En funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er strengt økende (alt strengt avtagende) hvis $f(x) < f(y)$ (alt $f(x) > f(y)$) når $x < y$.

NB: Igjen kan dette defineres fordi det er noe spesielt med mengden $\mathbb{R}$: vi har en bestemt rekkefølge på elementene i $\mathbb{R}$.

Definition (På)

Vi sier at $f : A \to B$ er en på dersom $f(A) = B$, dvs for alle $b \in B$ så finnes det en $a \in A$ slik at $f(a) = b$.

Skrevet som kvantifisert utsagn: $\forall b \, \exists a \; f(a) = b$.

Guess what, ennå mer om funksjoner

Definition (Økende/avtagende funksjon)

En funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er strengt økende (alt strengt avtagende) hvis $f(x) < f(y)$ (alt $f(x) > f(y)$) når $x < y$.

NB: Igjen kan dette defineres fordi det er noe spesielt med mengden $\mathbb{R}$: vi har en bestemt rekkefølge på elementene i $\mathbb{R}$.

Definition (På)

Vi sier at $f : A \to B$ er en på dersom $f(A) = B$, dvs for alle $b \in B$ så finnes det en $a \in A$ slik at $f(a) = b$.

Skrevet som kvantifisert utsagn: $\forall b \, \exists a \, f(a) = b$.

Definition (Bijeksjon)

En funksjon som både er 1-til-1 og på kalles en bijeksjon.

Merkelig, det handler *fortsatt* om funksjoner

Definition (Invers)

Hvis $f : A \to B$ er en bijeksjon så er f^{-1}, inversen til f, funksjonen $f^{-1} : B \to A$ definert av $f^{-1}(b) = a$ om $f(a) = b$.

Merkelig, det handler *fortsatt* om funksjoner

Definition (Invers)

Hvis $f : A \to B$ er en bijeksjon så er f^{-1}, inversen til f, funksjonen $f^{-1} : B \to A$ definert av $f^{-1}(b) = a$ om $f(a) = b$.

Definition (Komposisjon)

Med to funksjoner $f : A \to B$ og $g : B \to C$ kan vi danne komposisjonen av f og g, $g \circ f$, hvor $g \circ f : A \to C$ er definert ved

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Merkelig, det handler *fortsatt* om funksjoner

Definition (Invers)

Hvis $f : A \to B$ er en bijeksjon så er f^{-1}, inversen til f, funksjonen $f^{-1} : B \to A$ definert av $f^{-1}(b) = a$ om $f(a) = b$.

Definition (Komposisjon)

Med to funksjoner $f : A \to B$ og $g : B \to C$ kan vi danne komposisjonen av f og g, $g \circ f$, hvor $g \circ f : A \to C$ er definert ved

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Definition (Graf)

Gitt funksjon $f : A \to B$ så er grafen til f en mengde av ordnede par $\{(a, b) \mid a \in A \wedge f(a) = b\} \subseteq A \times B$.

Outline

Følger

Definition (Følge)

En følge er en funksjon fra en undermengde av heltallene til en mengde S. Vi bruker a_n til å benevne bildet til n, og kaller a_n et ledd i følgen

Følger

Definition (Følge)

En følge er en funksjon fra en undermengde av heltallene til en mengde S. Vi bruker a_n til å benevne bildet til n, og kaller a_n et ledd i følgen

Definition (Geometrisk progresjon)

En geometrisk progresjon er en følge på formen $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$.

Følger

Definition (Følge)

En følge er en funksjon fra en undermengde av heltallene til en mengde S. Vi bruker a_n til å benevne bildet til n, og kaller a_n et ledd i følgen

Definition (Geometrisk progresjon)

En geometrisk progresjon er en følge på formen $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$.

Definition (Aritmetisk progresjon)

En aritmetisk progresjon er en følge på formen
$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$.

Summasjon

Summasjon er notasjon for summering av følger:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n,$$

hvor m er summasjonens nedre grense, n er summasjonens øvre grense og j er summasjonens indeks.

Summasjon

Summasjon er notasjon for summering av følger:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n,$$

hvor m er summasjonens nedre grense, n er summasjonens øvre grense og j er summasjonens indeks.

Theorem

Hvis a og r er reelle tall, og $r \neq 0$ så er

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} \frac{ar^{n+1}-a}{r-1} & om\ r \neq 1 \\ (n+1)a & om\ r = 1 \end{cases}$$

Kardinalitet

Vi definerte kardinalitet av mengder, en alternativ måte å gjøre dette på er: to mengder A og B har samme kardinalitet om det finnes en bijeksjon mellom mengdene.

Kardinalitet

Vi definerte kardinalitet av mengder, en alternativ måte å gjøre dette på er: to mengder A og B har samme kardinalitet om det finnes en bijeksjon mellom mengdene.

Definition (Tellbar, overtellbar mengde)

En mengde som er endelig eller har samme kardinalitet som de positive heltallene kalles tellbar. En mengde som ikke er tellbar kalles overtellbar.