Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 11

$\boxed{1}$ Ligningssystemet kan skrives på matriseform som følger.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \pmod{19} \tag{1}$$

For 2×2 matriser gjelder alltid regelen

$$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

Derfor er

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \pmod{19}$$

Siden $8 \cdot 12 \equiv 1 \pmod{19}$ finner vi

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 13 & 5 \end{pmatrix} \pmod{19}$$

Følgelig er

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 13 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix} \pmod{19}$$

$\boxed{2}$ Vi bruker Fermats "lille" teorem.

$3^{88} \bmod 11 = 3^8 \bmod 11 = 3^{-2} \bmod 11 = 4^2 \bmod 11 = 5$, og $3^{77} \bmod 13 = 3^5 \bmod 13 = 243 \bmod 13 = 9$.

Kongruensene blir dermed

$$\begin{aligned} m &\equiv 8 \pmod{11} \\ m &\equiv 5 \pmod{13} \end{aligned}$$

Vi har at $6 \cdot 11 - 5 \cdot 13 = 1$. Det følger av dette og av at 11 og 13 er relativt primiske at

$$m \equiv 8 \cdot (-5) \cdot 11 + 5 \cdot 6 \cdot 11 \equiv 96 \pmod{143}$$

Altså er $m = 96$.

$\boxed{3}$ Sannhetstabellen blir

$(q$	$\rightarrow$	$(r$	$\vee$	$(\neg p)$	$))\oplus(($	p	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	$(\neg r))$
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0

Fra denne ser vi at formelen er ekvivalent med fomelen
$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$,
som kan forenkles til $p \wedge q$.

$\boxed{4}$ ved å løse den karakteristiske ligningen til rekursjonsligningen

$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$$

som er

$$r^2 = 2r + 3$$

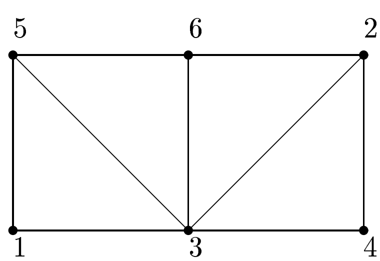
finner vi $r \in \{3, -1\}$. Siden vi ser at $a_3 = 3a_2$, antar vi at $a_n = \frac{2}{3}3^n$, altså $c = \frac{2}{3}$ og $r = 3$.

La $P(n)$ være utsagnet $a_n = \frac{2}{3}3^n$. Vi kan bruke en variant av matematisk induksjon, nemlig

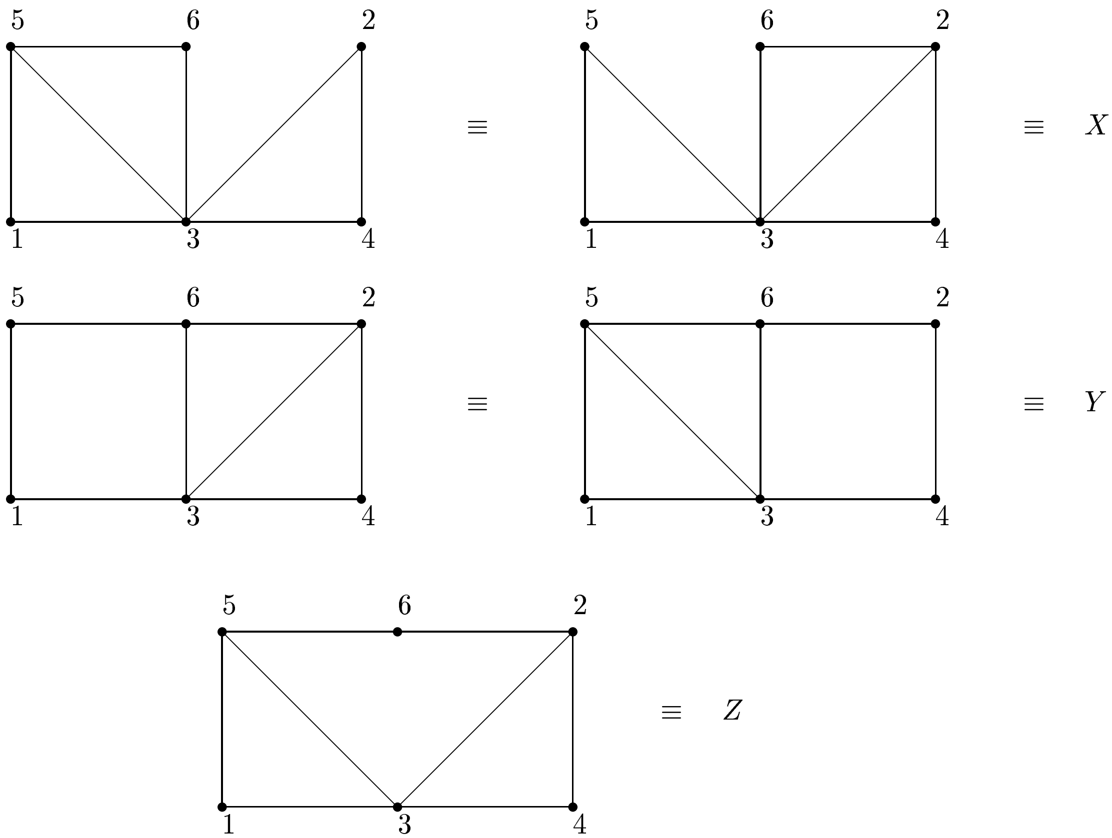
$$(P(1) \wedge P(2) \wedge (\forall n \geq 2)(P(n-1) \wedge P(n) \rightarrow P(n+1))) \rightarrow (\forall n \geq 1)P(n)$$

Vi ser at $P(1)$ og $P(2)$. Anta at $a_{n-1} = \frac{2}{3}3^{n-1}$ og $a_n = \frac{2}{3}3^n$. Da er $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} = 2\frac{2}{3}3^n + 3\frac{2}{3}3^{n-1} = \frac{2}{3}3^{n+1}$. At $a_n = \frac{2}{3}3^n$ for alle $n \geq 1$ følger fra varianten av induksjonsprinsippet.

$\boxed{7}$ Grafen med nabomatrisen A er tegnet under. Denne grafen har 4 hjørner med odde grad. Det er hjørnene 2,3,5, og 6. Disse hjørnene er forbundet med 5 kanter, og dersom vi fjerner en av disse 5 kantene får vi en graf med en eulervei.



Fjærning av disse kantene resulterer i 5 grafer, noen isomorfe.



Vi har 3 ikke-isomorfe grafer. At de er ikke isomorfe ser vi fordi gradsekvensene er henhldsvis 2, 2, 2, 2, 3, 5 for X, 2, 2, 2, 3, 3, 4 for Y og Z, men Z har ikke to nabohjørner av grad 2.

$\boxed{8}$ L må enten begynne med a eller b, hvilket betyr at det finnes språk X og Y slik at $L = aX \cup bY$. Y er av formen Z^*, der Z svarer til alle veier fra s_2 til s_2 som ikke går gjennom s_2. Vi ser at $Z = \{1\}\{b\}^*\{0\}$. Videre ser vi at $X = \{b\}^*\{0\}Z^*$. Et regulært uttrykk for L blir da for eksempel $(ab^*0 \cup b)(1b^*0)^*$.

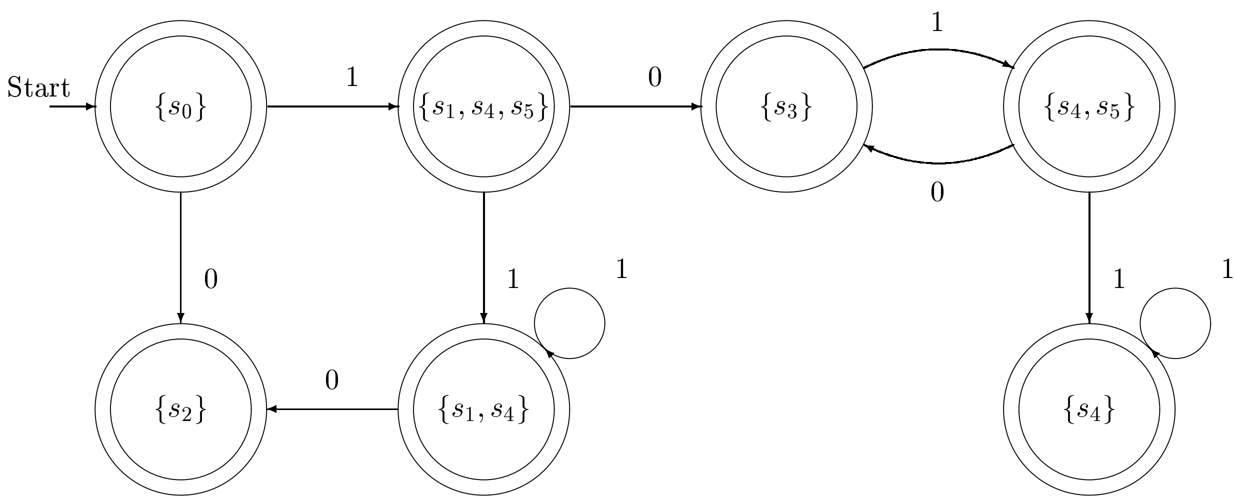
$\boxed{9}$ Automater som genererer henholdsvis språkene representert av 1^*0 og $(10)^*1^*$ er gitt ved henholdsvis $\{(s_0 1 S_0), (s_0 0 s_1)\}, F = \{s_1\}$ og $\{(s_0 1 s_1), (s_1 0 s_0), (s_1 1 s_2)(s_2 1 s_2)\}, F = \{s_0, s_2\}$. Setter vi disse to sammen og renummererer tilstandene får vi en ikke deterministisk automat med tabell

	0	1	F
s_0	s_2	s_1, s_4, s_5	$*$
s_1	s_2	s_1	
s_2			$*$
s_3		s_4, s_5	$*$
s_4		s_4	$*$
s_5	s_3		

Tabellen til en deterministisk automat som gjenkjenner L er da for eksempel

	0	1	F
$\{s_0\}$	$\{s_2\}$	$\{s_1, s_4, s_5\}$	$*$
$\{s_1\}$	$\{s_2\}$	$\{s_1\}$	
$\{s_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$*$
$\{s_3\}$	$\emptyset$	$\{s_4, s_5\}$	$*$
$\{s_4\}$	$\emptyset$	$\{s_4\}$	$*$
$\{s_5\}$	$\{s_3\}$	$\emptyset$	
$\{s_1, s_4, s_5\}$	$\{s_2, s_3\}$	$\{s_1, s_4\}$	$*$
$\{s_4, s_5\}$	$\{s_3\}$	$\{s_4\}$	$*$
$\{s_2, s_3\}$	$\emptyset$	$\{s_4, s_5\}$	$*$
$\{s_1, s_4\}$	$\{s_2\}$	$\{s_1, s_4\}$	$*$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	

Her kan vi godt identifisere $\{s_3\} = \{s_2, s_3\}$. Det viser seg da at $\{s_5\}$ og $\{s_1\}$blir overflødige, og en enkel endelig automat som gjenkjenner L er gitt for eksempel ved diagrammet



$\boxed{10}$ La A være mengden av skilt som har minst en B, la B være mengden av skilt med nøyaktig 2 8-ere, og la C være mengden av skilt med nøyaktig 2 7-ere.

Vi har

$$|A \cap C| = 50 \cdot \binom{5}{2} 9^3 = 364500$$

$$|B \cap C| = 26 \cdot 25 \cdot \binom{5}{2}\binom{3}{2} 8 = 156000$$

$$|A \cap B \cap C| = 50 \cdot \binom{5}{2}\binom{3}{2} 8 = 12000$$

Vi skal bestemme $|(A \cup B) \cap C| = |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |(A \cap C)| + |(B \cap C)| - |A \cap B \cap C| = 364500 + 156000 - 12000 = 508500$. Det tar 1 minutt og 53 sekumder.