Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Alexei Rudakov 73 59 16 95

EKSAMEN I FAG SIF5015 DISKRET MATEMATIKK

Torsdag 5. august 1999
Tid: 0900-1400

Hjelpemidler:
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Godkjent kalkulator tillatt. Hver gang du gjør en beregning med kalkulatoren, noter dette i teksten.

Sensurfrist 1999.

Oppgave 1 Det er kjent at prinsessen (P) er i et av de fire rommene og at det er en tiger (T) i hvert av de andre rommene. På døren til hvert rom står en tekst:
1: P er enten her, eller i rom 3.
2: Hvis P er her, da er teksten på døren til rom 3 usann.
3: T er i rom 1, og T er i rom 4.
4: Hvis T er her, da er P i rom 2.
Det er kjent at en av tekstene er usanne og at tre er sanne. Hvor er prinsessen?
Forklar hvordan du kom til svaret.

Oppgave 2 Et datamaskinpassord består av 6 symboler, og symbolene er enten bokstaver fra det norske alfabetet (29 stk) eller desimale siffer (0,1,...,9) eller tegnet "+" (pluss). Hvor mange passord er det med egenskapen:
(det er nøyaktig 3 bokstaver) $\vee$ (det er nøyaktig 2 siffer).
Begrunn svaret ditt.

Oppgave 3 En følge av tall er definert ved regelen:

$$a(n) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{i} (2j-1))^2 \quad \text{for} \quad n \geq 2.$$

Beregn $a(2), a(3)$. Finn tallet q slik at $a(n) = \Theta(n^q)$. Bevis at

$$\frac{n^q}{6} \leq a(n) \leq n^q \quad \text{for} \quad n \geq 2.$$

Oppgave 4 Finn alle løsninger av systemet:

$$\begin{cases} 48x - 3y \equiv 1 \\ \\ 3x + 45y \equiv 3 \end{cases} \qquad \pmod{25}$$

Skriv ned alle positive løsninger (x, y) som også tilfredsstiller

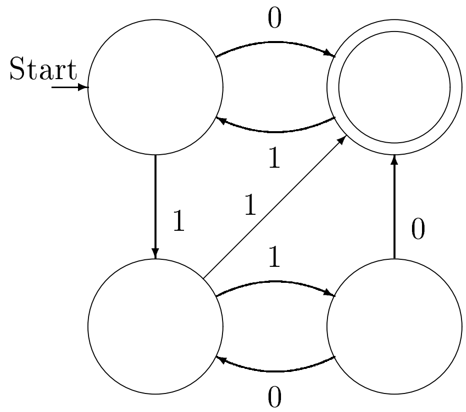
$$120 \leq x + y \leq 150.$$

Oppgave 5 Relasjonen Q på $X = \{1, 2, ..., 11\}$ defineres ved regelen:

$$Q = \{(a,b) | \;\; a + 2b \equiv 0 \quad \text{mod} \quad 11\}.$$

La R være den transitive tillukningen av Q.
Vis at R er en ekvivalensrelasjon. Finn alle ekvivalensklassene til R. Forklar hvordan du fant ekvivalensklassene.

Oppgave 6 Lag en deterministisk endelig automat som aksepterer (genererer) samme språk (over alfabetet $A = \{0, 1\}$) som den ikke-deterministiske automaten gitt ved tilstandsdiagrammet:



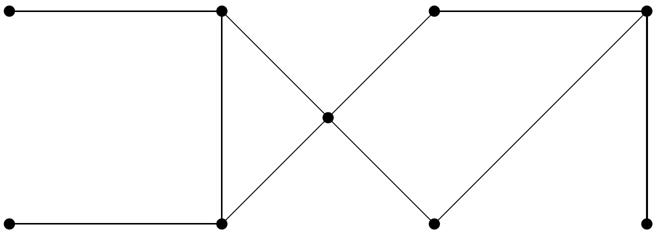
Tegn tilstandsdiagrammet for den deterministiske automaten.

Oppgave 7 Lag en ikke-determinisitisk automat som aksepterer (genererer) språket

$$L = 1a^*1 \cup b^*(01a)^*$$

over alfabetet $A = \{a, b, 0, 1\}$.

Oppgave 8 Gitt grafen G:



Finn alle delgrafer som er utspennende trær i G. Beskriv hvilke av trærne er isomorfe, og hvilke er ikke-isomorfe.
Begrunn hvorfor de er ikke-isomorfe.

Oppgave 9 I listen
1.1.1; 1.1.2.1; 1.1.2.2; 1.1.2.3; 1.2.1; 1.2.2; 2.1.1; 2.2.1.1; 2.x.y.z; 2.3.1.2; 2.4.1; 2.4.2,
av universelle adresser til alle bladene av et ordnet tre med rot, er tre siffer ukjent. Finn disse siffrene, tegn treet og forklar hvordan du fant dem.

Oppgave 10 Finn alle heltall x slik at $100 \leq x \leq 200$ og

$$\begin{cases} x \equiv 70^{5842} & \mod \quad 17 \\ 15x \equiv 21 & \mod \quad 12. \end{cases}$$