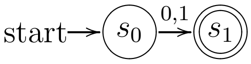
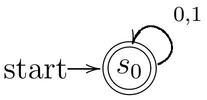
LØSNINGSFORSLAG, SIF 5015, DISKRET MATEMATIKK
12. august 2003

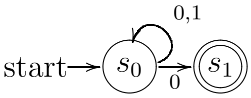
Oppgave 1. La oss begynne med å bygge en ikke-deterministisk maskin:



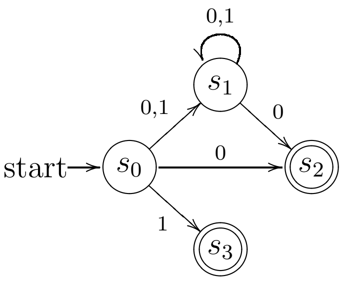
gjennkjenner $0 \cup 1$ og



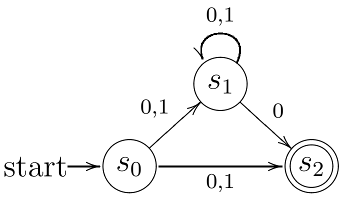
gjennkjenner $(0 \cup 1)^*$. Fra dette ser vi at



gjennkjenner $(0 \cup 1)^*0$, og følgende automat vil gjennkjenne $(0 \cup 1)^*0 \cup 1$:



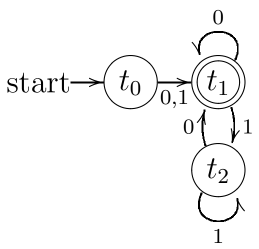
En litt enklere automat som gjør samme jobben er følgende:



Vi må nå gjøre en av disse to siste automatene deterministiske, la oss gjøre dette for den siste av dem. Vi begynner med å lage en tabell:

s_0	0	$s_1,\ s_2$
s_0	1	$s_1,\ s_2$
$s_1,\ s_2$	0	$s_1,\ s_2$
$s_1,\ s_2$	1	s_1
s_1	0	$s_1,\ s_2$
s_1	1	s_1

Dette gir oss følgende deterministiske endelig-tilstandsmaskin M slik at $L(M) = L(w)$ (Vi har kalt tilstanden som tilsvarer s_0 for t_0, $(s_1,\ s_2)$ for t_1 og s_1 for t_2.



Oppgave 2. En tautologi er et utsagn som alltid er sant, uavhengig av sannhetsverdiene til utsagnsvariablene, og en selvmotsigelse er et utsagn som alltid er usant. Vi kan for eksempel lage sannhetstabeller for å sjekke dette. Her er tabeller for henholdsvis A, B og C :

p	q	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$	$\neg p \wedge (p \vee q) \rightarrow q$
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$q \rightarrow (p \wedge (p \rightarrow q))$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

p	q	r	$r \wedge q$	$p \vee q$	$(r \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Fra disse tabellene ser vi at A og C er tautologiene, mens det ikke finnes noen selvmotsigelser.

Oppgave 3. Hvis hun kjøper x poser vil hun ha kjøpt $19x$ klosser. Når hun deler dette på 23 blir det en rest på en. En annen måte å uttrykke dette på er:

$$19x \equiv 1 \pmod{23}$$

(x er en invers til 19 modulo 23.)

Vi bruker Euklids algoritme:

$$\begin{aligned} 23 &= 19+4 \\ 19 &= 4\cdot 4+3 \\ 4 &= 3+1 \end{aligned}$$

$$1 = 4-3 = 5\cdot 4 - 19 = 5\cdot 23 - 6\cdot 19.$$

Dette viser at -6 er en invers til 19 modulo 23. (Legge også merke til at dette viser at 5 er en invers til 23 modulo 19. Vi vil bruke dette i den neste oppgaven.)

$-6+23k$ er inverser til 19 modulo 23 for alle heltall k, og dette er alle inversene siden 19 og 23 er relativt primiske. Dermed er 17 den minste positive inversen.

M.a.o.: Hun kjøpte 17 poser med klosser.

Oppgave 4. Fordi 19 og 23 er relativt primiske forteller den kinesiske restsetningen oss at det finnes en løsning, at hvis x er en løsning så er $x+437k$ det også hvis k er et heltall $(19\cdot 23 = 437)$ og at dette er alle løsningene. Vi begynner med å finne en løsning:

La oss først finne et tall x_1 slik at

$$x_1 \equiv 4 \pmod{23} \qquad \text{og} \qquad x_1 \equiv 0 \pmod{19}.$$

Vi vet fra oppgave 3 at -6 er en invers til 19 modulo 23, så $(-6)\cdot 19 \equiv 1 \pmod{23}$, så $4\cdot(-6)\cdot 19 \equiv 4 \pmod{23}$. Fordi 19 er en faktor i $-456 = 4\cdot(-6)\cdot 19$ kan vi ta $x_1 = -456$.

På samme måte finner vi at $x_2 = 6\cdot 5\cdot 23 = 690$ tilfredsstiller

$$x_2 \equiv 0 \pmod{23} \qquad \text{og} \qquad x_2 \equiv 6 \pmod{19}$$

fordi 5 er en invers til 23 modulo 19. Dermed er $x = x_1 + x_2 = -456 + 690 = 234$ en løsning.

Dermed vet vi at alle løsninger er på formen $234 + 437k$. Hvis vi tar f.eks. $k = -1$ får vi -203 som en negativ løsning.

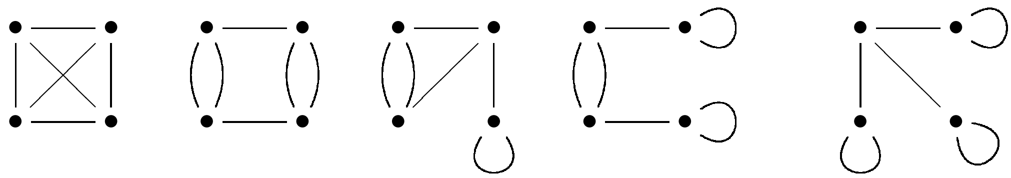
Oppgave 5.

a) Hver kant har to endepunkt, så vi har 12 ender som kommer inn til 4 hjørner. Skal alle hjørnene ha lik grad, må denne dermed være $\frac{12}{4} = 3$.

b) Hvis jeg skal starte og slutte i et bestemt hjørne, betyr dette at start og slutt medfører at dette hjørnet er endepunkt for to kanter (enten endepunkt for to forskjellige kanter, eller begge endepunktene til en kant (som dermed er en løkke)). Hvis jeg eventuelt kommer innom dette hjørnet før jeg stopper, blir hjørnet truffet to ganger til for hver gang jeg er innom. Jeg kan ikke komme inn eller ut av hjørnet langs en ende jeg allered har kommet inn eller ut, så graden til dette hjørnet må være et partall. Siden alle hjørnene i grafene våre har grad 3 i alle hjørnene, er det ikke mulig å gå langs kantene slik beskrevet i oppgaven.

Med samme argumentasjon som over, ser vi at der vi starter og stopper, hvis vi starter og stopper på forskjellig sted, må hjørnene ha odde grad. For de to andre hjørnene derimot viser argumentasjonen over at graden må være partall. Dette er heller ikke mulig.

c) Her er 5 forskjellige grafer som tilfredsstiller kravene våre, og som ikke er isomorfe med hverandre.



La oss for eksempel sammenligne de to første. I den første er alle hjørnene naboer, mens det er ikke tilfellet i den andre. Dermed kan de ikke være isomorfe. (Samme argument viser at ingen av de andre heller er isomorfe med den første.) På lignende vis ser vi også at ingen av grafene med løkker kan være isomorfe med noen av de uten løkker, siden en løkke ved et hjørne sier at dette hjørnet er nabo med seg selv.

Oppgave 6. Hver av de åtte mennene hilser på fire kvinner, noe som gir $4 \cdot 8 = 32$ håndhilsninger.

En mann hilser på syv menn. La oss se på en mann av gangen. Den første hilser på 7 stykker. Den neste hilser også på syv, men en av dem har vi allerede talt med, så det er 6 flere håndhilsninger som finner sted. For tredjemann har vi allerede talt med to hilsninger, så det er 5 som gjenstår. Dette fortsetter til vi kommer til sistemann. Alle hans hilsninger er talt med allerede. Vi får dermed $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 28$ håndhilsninger blandt mennene.

Dette gir totalt 60 håndhilsninger.

Oppgave 7.

a) La oss begynne med venstre ulikhet: Vi ser at ulikheten er sann for $n = 2$ fordi $1^2 = 1 < \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$.

Vi må nå vise induksjonssteget: vi må vise at $1^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3}$ (induksjonshypotesen) medfører at $1^2 + \cdots + n^2 < \frac{(n+1)^3}{3}$:

$$\begin{aligned}
1^2 + \cdots + n^2 &= 1^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 \\
&< \frac{n^3}{3} + n^2 \\
&< \frac{n^3}{3} + n^2 + n + \frac{1}{3} = \frac{(n+1)^3}{3}
\end{aligned}$$

Den første ulikheten følger av induksjonshypotesen, og den andre er sann fordi både n og $\frac{1}{3}$ er positive. Dermed er induksjonssteget vist, og ulikheten er derfor sann for alle $n > 1$.

La oss nå se på den høyre ulikheten: Vi ser først at ulikheten er sann for $n = 1 : \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3} < 1^2 = 1$.

Induksjonssteget: Vi må vise at $\frac{n^3}{3} < 1^2 + \cdots + n^2$ medfører at $\frac{(n+1)^3}{3} < 1^2 + \cdots + (n+1)^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^3}{3} &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} = \frac{n^3}{3} + \frac{3n^2 + 3n + 1}{3} \\
&< 1^2 + \cdots + n^2 + \frac{3n^2 + 3n + 1}{3} \\
&< 1^2 + \cdots + n^2 + (n^2 + 2n + 1) = 1^2 + \cdots + (n+1)^2
\end{aligned}$$

Den første ulikheten følger fra induksjonshypotesen, den andre fra at $2n + 1 > n + \frac{1}{3}$. Dermed er induksjonssteget bevist, så ulikheten er sann for alle $n \geq 1$.

For å vise at $f(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots n^2$ er $\Theta(n^3)$ må vi finne tall A, B og k slik at $An^3 \leq f(n) \leq Bn^3$ for alle n slik at $n \geq k$. I tillegg krever vi at $A > 0$.

La oss begynne med den første av disse ulikhetene, med andre ord, vi ser etter et tall A. Fra den andre ulikheten vi viste med induksjon får vi at vi kan velge $A = \frac{1}{3}$.

For å finne en B som tilfredsstiller kravene kan vi bruke den første ulikheten vi viste ved induksjon, men med $n + 1$ i stedet for n. Da får vi:

$$\begin{aligned}
1^2 + \cdots + n^2 &< \frac{(n+1)^3}{3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} \\
&< \frac{n^3 + 3n^3 + 3n^3 + n^3}{3} = \frac{8n^3}{3}.
\end{aligned}$$

Dermed kan vi bruke $B = \frac{8}{3}$.

Vi har vist at den ene ulikheten er gyldig for $n > 0$ og den andre for $n > 1$, så vi kan for eksempel ta $k = 2$.

b) At $g(n)$ er $\Theta(n^4)$ betyr at det finnes tall $A,\ B$ og k (ikke nødvendigvis de samme som i i deloppgaven over) slik at $An^4 < g(n) < Bn^4$ for alle n som er større enn eller lik k.

Over fant vi nettopp at $\frac{1}{3}n^3 < f(n) < \frac{8}{3}n^3$ for alle n større enn eller lik to.

Dette gir oss at

$$\frac{A}{3}n^7 = (\frac{1}{3}n^3)(An^4) < h(n) < (\frac{8}{3}n^3)(Bn^4) = \frac{8B}{3}n^7$$

for alle n som er større enn både k og to.

Dette viser at $h(n)$ er $\Theta(n^7)$, vi kan med andre ord ta $q = 7$. (Det er også mulig å vise at dette er den eneste mulige verdien for q.)