



Faglig kontakt under eksamen:  
Alexei Roudakov 73 59 16 95

## EKSAMEN I FAG SIF 5015 DISKRET MATEMATIKK

Torsdag 14. mai 1998

Tid: 0900-1400

Tillatte hjelpemidler:  
Godkjent lommekalkulator tillatt.  
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

### Oppgave 1

Bruk Euklids algoritme til å finne den inverse til 11 mod 26. Løs følgende system (det er nyttig å kjenne den inverse!):

$$\begin{cases} 5x + 2y \equiv 1 \pmod{26} \\ 2x + 3y \equiv 2 \pmod{26} \end{cases}$$

### Oppgave 2

Finne det minste positive heltallet  $m$  slik at:

$$\begin{cases} m + 2^{100} \equiv 5 \pmod{13} \\ m + 2^{99} \equiv 7 \pmod{17} \end{cases}$$

### Oppgave 3

La  $f(n)$  være summen av de  $n$  første odde naturlige tall og la  $g(n) = \sum_{k=1}^n k$ .

Finne  $q$  slik at  $f(n) \cdot g(n) = \Theta(n^q)$ . Forklar hvorfor.

**Oppgave 4**

La  $s(n) = \sum_{i=0}^n f_{3i+1}$  der  $f_k$  er Fibonacci-tallene ( $f_1 = f_2 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ ). En har observert at  $s(n)$  ser ut til å være halvparten av et Fibonacci-tall. Undersøk dette og skriv ned en formel som så skal vises ved matematisk induksjon.

**Oppgave 5**

La  $X = \{2, 4, 6, 12\}$  med den delvise ordningen “dividerer” og la  $Y = \{a, b, c\}$  med den delvise ordningen gitt ved betingelsene:

$$a < b, \quad a < c, \quad b \text{ og } c \text{ er ikke sammenlignbare.}$$

Tegn Hasse-diagrammet til den leksikografiske ordningen på  $X \times Y$ .

**Oppgave 6**

En graf skulle være gitt ved en insidensmatrise, men **ett** av elementene i matrisen ble feil. Det er kjent at grafen har en Euler-vei. Tegn alle mulige slike grafer og en Euler-vei i hver av dem gitt at insidensmatrisen med trykkfeil er:

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Oppgave 7**

En graf er gitt ved sin “adjacency”-matrise  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ønsker å omgjøre grafen til et tre ved å fjerne **en** kant. Hvor mange ikke-isomorfe trær kan konstrueres på denne måten? Tegn dem. Hvorfor er de ikke-isomorfe?

**Oppgave 8**

Finn en **regulær grammatikk** som genererer følgende språk  $L = a(01)^* \cup b1^*$  over alfabetet  $A = \{a, b, 0, 1\}$ . Forklar hvorfor.

**Oppgave 9**

Finn **tilstandstabellen** og tegn **tilstandsdiagrammet** til en deterministisk automat som gjenkjenner språket  $L = (01)^* \cup 0^*1$  over alfabetet  $A = \{0, 1\}$ . Forklar hvorfor.

**Oppgave 10**

Bilskilt i landet Luala består av 2 **forskjellige** bokstaver fra alfabetets første 26 bokstaver og 5 desimale siffer fra  $0, 1, \dots, 9$ . (Slik at for eksempel skiltet JB 00007 er mulig.) Politiets komputer bruker 1 sekund på å lete igjennom  $10^3$  skilt i politiarkivet. Hvor lang tid tar det å gjennomføre alle mistenkte skilt hvis den informasjonen som er tilgjengelig bare er følgende tre utsagn om skiltet skrevet av en logiker som så forbrytelsen:

- (i):  $\neg$  (tre av sifrene var like),
- (ii): (bokstaven Q forekom)  $\vee$  (sifferet 0 forekom én gang)
- (iii): (8 forekom to ganger).

Forklar tankegangen din.