Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Alexei Roudakov 73 59 16 95

EKSAMEN I FAG SIF 5015 DISKRET MATEMATIKK

Torsdag 14. mai 1998
Tid: 0900-1400

Tillatte hjelpemidler:
Godkjent lommekalkulator tillatt.
Ingen trykte eller hændskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1
Bruk Euklids algoritme til å finne den inverse til 11 mod 26. Løs følgende system (det er nyttig å kjenne den inverse!):

$$\begin{cases} 5x + 2y \equiv 1 \pmod{26} \\ 2x + 3y \equiv 2 \pmod{26} \end{cases}$$

Oppgave 2
Finn det minste positive heltallet m slik at:

$$\begin{cases} m + 2^{100} \equiv 5 \pmod{13} \\ m + 2^{99} \equiv 7 \pmod{17} \end{cases}$$

Oppgave 3
La $f(n)$ være summen av de n første odde naturlige tall og la $g(n) = \sum_{k=1}^{n} k$.

Finn q slik at $f(n) \cdot g(n) = \Theta(n^q)$. Forklar hvorfor.

Oppgave 4

La $s(n) = \sum_{i=0}^{n} f_{3i+1}$ der f_k er Fibonacci-tallene ($f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$). En har observert at $s(n)$ ser ut til å være halvparten av et Fibonacci-tall. Undersøk dette og skriv ned en formel som så skal vises ved matematisk induksjon.

Oppgave 5

La $X = \{2, 4, 6, 12\}$ med den delvise ordningen "dividerer" og la $Y = \{a, b, c\}$ med den delvise ordningen gitt ved betingelsene:

$$a \prec b,\ a \prec c,\ b \text{ og } c \text{ er ikke sammenlignbare.}$$

Tegn Hasse-diagrammet til den leksikografiske ordningen på $X \times Y$.

Oppgave 6

En graf skulle være gitt ved en insidensmatrise, men **ett** av elementene i matrisen ble feil. Det er kjent at grafen har en Euler-vei. Tegn alle mulige slike grafer og en Euler-vei i hver av dem gitt at insidensmatrisen med trykkfeil er:

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 7

En graf er gitt ved sin "adjacency"-matrise A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ønsker å omgjøre grafen til et tre ved å fjerne **en** kant. Hvor mange ikke-isomorfe trær kan konstrueres på denne måten? Tegn dem. Hvorfor er de ikke-isomorfe?

Oppgave 8
Finn en **regulær grammatikk** som genererer følgende språk $L = a(01)^* \cup b1^*$ over alfabetet $A = \{a, b, 0, 1\}$. Forklar hvorfor.

Oppgave 9
Finn **tilstandstabellen** og tegn **tilstandsdiagrammet** til en deterministisk automat som gjenkjenner språket $L = (01)^* \cup 0^*1$ over alpabetet $A = \{0, 1\}$. Forklar hvorfor.

Oppgave 10
Bilskilt i landet Luala består av 2 **forskjellige** bokstaver fra alfabetets første 26 bokstaver og 5 desimale siffer fra 0,1,...,9. (Slik at for eksempel skiltet JB 00007 er mulig.) Politiets komputer bruker 1 sekund på å lete igjennom 10^3 skilt i politiarkivet. Hvor lang tid tar det å gjennomsøke alle mistenkte skilt hvis den informasjonen som er tilgjengelig bare er følgende tre utsagn om skiltet skrevet av en logiker som så forbrytelsen:

(i): $\neg$ (tre av sifrene var like),

(ii): (bokstaven Q forekom) $\vee$ (sifferet 0 forekom én gang)

(iii): (8 forekom to ganger).

Forklar tankegangen din.