SIF5015 Diskret matematikk
Mandag 13. mai 2002
løsningsforslag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

1 Det er bare formel B som er tilfredsstillbar, de andre to er selvmotsigelser. Det er bare én tilordning som gir fomelen sannhetsverdien T, og det er $S(p,q,r) = (T,T,F)$.

Ved ekspansjon og De Morgan har vi $F(x,y,z,w) = x\bar{x} + x\bar{w} + \bar{y}\bar{x} + \bar{y}\bar{w} + \overline{\overline{xzw}}\bar{y} = x\bar{w} + \bar{y}\bar{x} + \bar{y}\bar{w} + xzw\bar{y}$.

Karnaughdiagrammet under viser at $F(x,y,z,w) = x\bar{w} + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}z$.

Merk at diagrammet kan "rulles" både horisontalt og vertikalt.

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
$\bar{z}\bar{w}$	1	0	1	1
$\bar{z}w$	1	0	0	0
zw	1	0	0	1
$z\bar{w}$	1	0	1	1

	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$
zw	0	1	1	0
$z\bar{w}$	1	1	1	0
$\bar{z}\bar{w}$	1	1	1	0
$\bar{z}w$	0	0	1	0

2 **a)** Ifølge Fermats lille teorem er $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, og derfor er $2^{1213} \mathbf{mod}\, 13 = 2$.

b) Sett $m = 13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730$. Vi har

$$\frac{m}{13} = 210 \equiv 2 \pmod{13}$$
$$\frac{m}{14} = 195 \equiv -1 \pmod{14}$$
$$\frac{m}{14} = 182 \equiv 2 \pmod{15}$$

Fordi $8 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{15}$, er $x \equiv 8 \cdot 182 - 5 \cdot 195 + 210 \equiv 691 \pmod{2730}$. Siden det er en og kun en løsning $0 \leq x \leq 2729$ er $x = 691$ den minste positive løsningen.

$\boxed{3}$ **a)**

La utsagnet $P(n)$ være $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$. $P(1)$ er utsagnet $1=1$, og dette er sant.

Må vise at $P(n)\to P(n+1)$ for vilkårlig $n\geq 1$.

Dersom vi antar at $P(n)$ er sann har vi

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=n^2+2(n+1)-1=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

Altså $P(n)\to P(n+1)$.

At $P(n)$ er sann for alle $n\geq 1$ følger av induksjonsprinsippet.

b)

La utsagnet $Q(n)$ være $n^2>2n+1$. $Q(3)$ er utsagnet $9>7$, og dette er sant.

Må vise at $Q(n)\to Q(n+1)$ for vilkårlig $n\geq 3$.

Dersom vi antar at $Q(n)$ er sann har vi

$$(n+1)^2=n^2+2n+1>4n+2>2(n+1)+1=2n+3,$$

som er sant når $n\geq 3$.

Altså $Q(n)\to Q(n+1)$, for $n\geq 3$.

At $Q(n)$ er sann for alle $n\geq 3$ følger av induksjonsprinsippet.

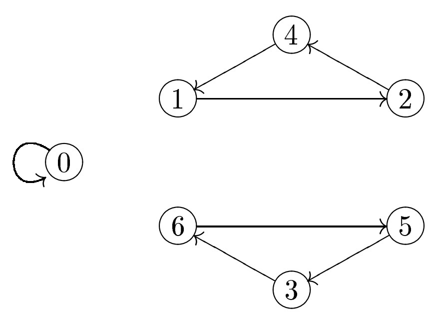
$\boxed{4}$ **a)**

$c_1=bq$, der $q=(1+\frac{r}{12})^3$.

b)

Rekursjonsligningen er $c_{n+1}=q(c_n+b)$, som har løsning av formen $c_n=Aq^n+B$. Fra initialbetingelsen får vi. $c_n=bq\frac{q^n-1}{q-1}$, og $c_{180}=\text{kr.}\,499.939,14$.

$\boxed{5}$ **a)** Som graf $G_R=$



Som matrise $M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$

b)

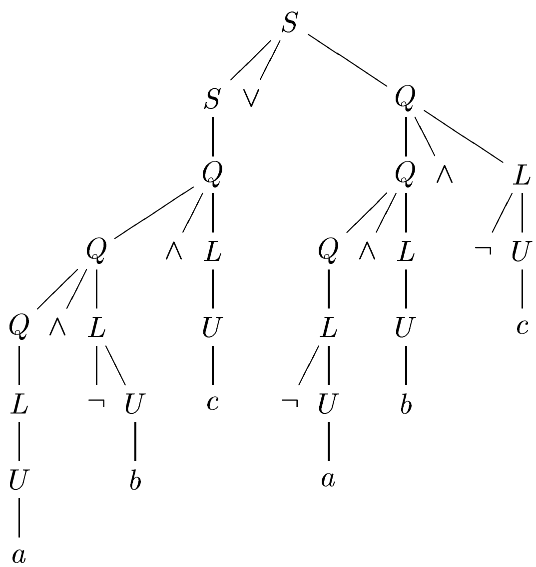
Relasjonen R^* er refleksiv fordi R^3 er identiteten. Dette sees lettest fra grafen.

Relasjonen R^* er symmetrisk fordi $R^2 = R^{-1}$. Dette sees også lettest fra grafen.

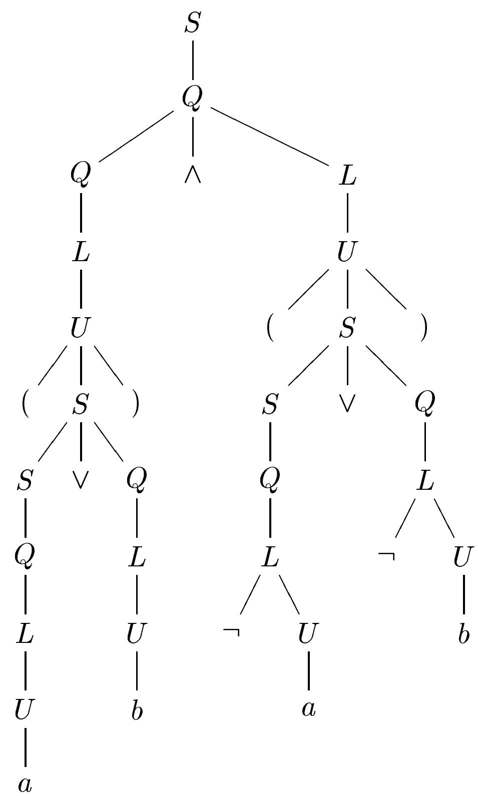
Relasjonen R^* er transitiv pr. def.

Partisjonen er $\{\{0\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6\}\}$.

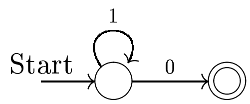
$\boxed{6}$ **a)**



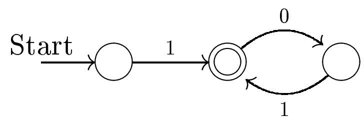
b)



$\boxed{7}$ En automat med språket gitt ved det regulære uttrykket 1^*0 er f.eks.

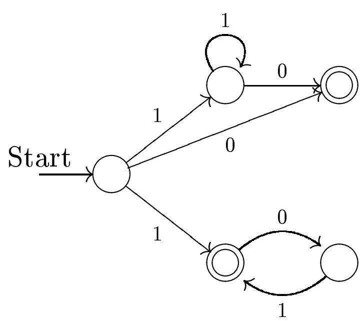


En automat med språket gitt ved det regulære uttrykket $1(01)^*$ er f.eks.



En automat med språket representert ved unionen $1^*0 \cup 1(01)^*$, er f.eks.

a)



En deterministisk automat med samme språk, er f.eks.

b)