SIF5015 Diskret matematikk
Mandag 13. mai 2002
løsningsforslag

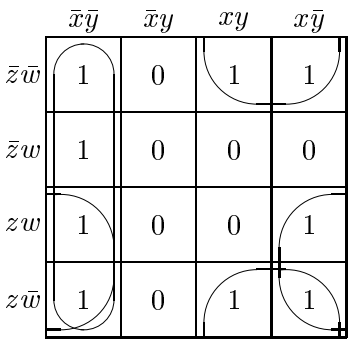
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

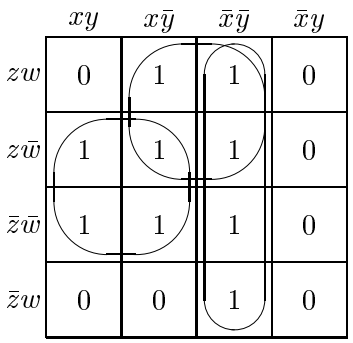
1 Det er bare formel B som er tilfredsstillbar, de andre to er selvmotsigelser. Det er bare én tilordning som gir fomelen sannhetsverdien T, og det er $S(p,q,r) = (T,T,F)$.

Ved ekspansjon og De Morgan har vi $F(x,y,z,w) = x\bar{x} + x\bar{w} + \bar{y}\bar{x} + \bar{y}\bar{w} + \overline{\overline{xzw}}\bar{y} = x\bar{w} + \bar{y}\bar{x} + \bar{y}\bar{w} + xzw\bar{y}$.

Karnaughdiagrammet under viser at $F(x,y,z,w) = x\bar{w} + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}z$.

Merk at diagrammet kan "rulles" både horisontalt og vertikalt.





2 **a)** Ifølge Fermats lille teorem er $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, og derfor er $2^{1213} \bmod 13 = 2$.

b) Sett $m = 13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730$. Vi har

$$\frac{m}{13} = 210 \equiv 2 \pmod{13}$$
$$\frac{m}{14} = 195 \equiv -1 \pmod{14}$$
$$\frac{m}{14} = 182 \equiv 2 \pmod{15}$$

Fordi $8 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{15}$, er $x \equiv 8 \cdot 182 - 5 \cdot 195 + 210 \equiv 691 \pmod{2730}$. Siden det er en og kun en løsning $0 \le x \le 2729$ er $x = 691$ den minste positive løsningen.

3 **a)**

La utsagnet $P(n)$ være $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$. $P(1)$ er utsagnet $1 = 1$, og dette er sant.

Må vise at $P(n) \to P(n+1)$ for vilkårlig $n \geq 1$.

Dersom vi antar at $P(n)$ er sann har vi

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Altså $P(n) \to P(n+1)$.

At $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$ følger av induksjonsprinsippet.

b)

La utsagnet $Q(n)$ være $n^2 > 2n + 1$. $Q(3)$ er utsagnet $9 > 7$, og dette er sant.

Må vise at $Q(n) \to Q(n+1)$ for vilkårlig $n \geq 3$.

Dersom vi antar at $Q(n)$ er sann har vi

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 4n + 2 > 2(n+1) + 1 = 2n + 3,$$

som er sant når $n \geq 3$.

Altså $Q(n) \to Q(n+1)$, for $n \geq 3$.

At $Q(n)$ er sann for alle $n \geq 3$ følger av induksjonsprinsippet.

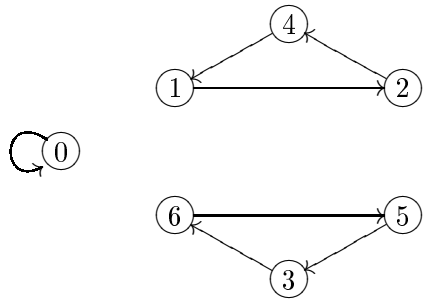
4 **a)**

$c_1 = bq$, der $q = (1 + \frac{r}{12})^3$.

b)

Rekursjonsligningen er $c_{n+1} = q(c_n + b)$, som har løsning av formen $c_n = Aq^n + B$. Fra initialbetingelsen får vi. $c_n = bq\frac{q^n-1}{q-1}$, og $c_{180} = \text{kr. } 499.939,14$.

5 **a)** Som graf $G_R =$



Som matrise $M_R =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

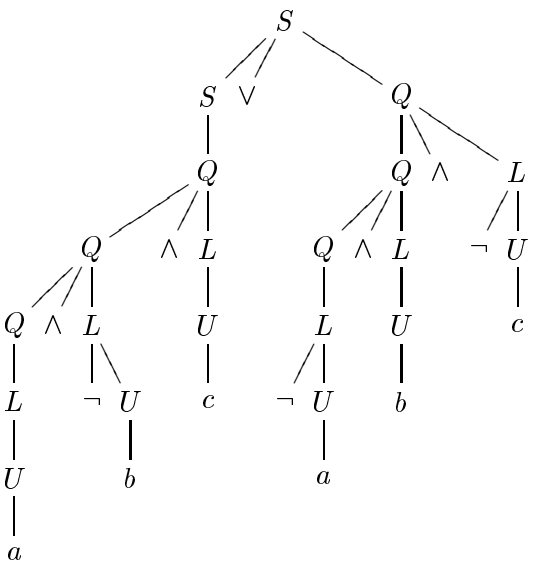
Relasjonen R^* er refleksiv fordi R^3 er identiteten. Dette sees lettest fra grafen.

Relasjonen R^* er symmetrisk fordi $R^2 = R^{-1}$. Dette sees også lettest fra grafen.

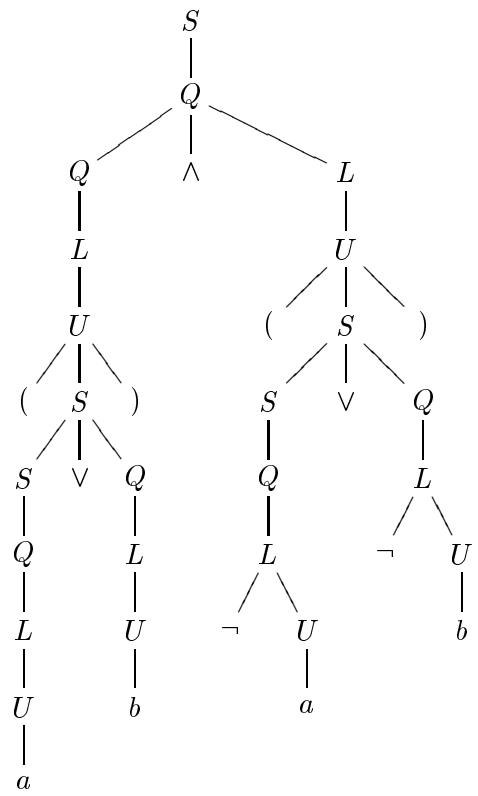
Relasjonen R^* er transitiv pr. def.

Partisjonen er $\{\{0\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6\}\}$.

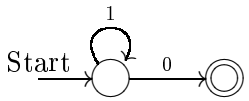
6 **a)**



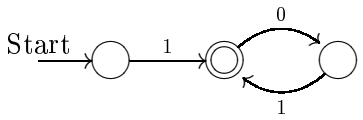
b)



7 En automat med språket gitt ved det regulære uttrykket 1^*0 er f.eks.

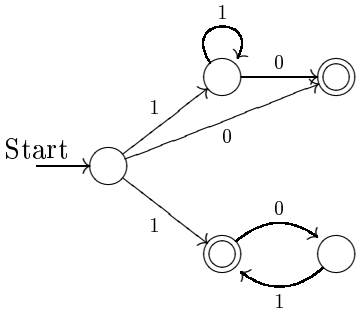


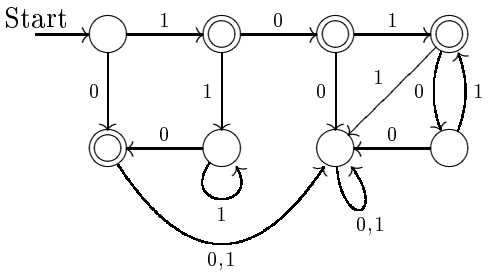
En automat med språket gitt ved det regulære uttrykket $1(01)^*$ er f.eks.



En automat med språket representert ved unionen $1^*0 \cup 1(01)^*$, er f.eks.

a)



En deterministisk automat med samme språk, er f.eks.

b)