Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

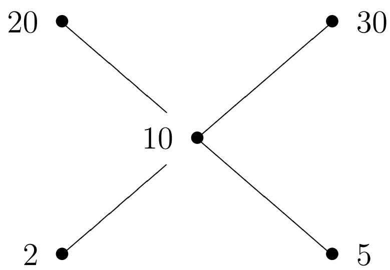
Løsningsforslag
TMA4140 — Diskret matematikk — Eksamen høsten 2003

1. Vi må sjekke at R er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

   Refleksiv: Ethvert tall deler seg selv.

   Antisymmetrisk: $a|b$ medfører at $a \leq b$, så hvis i tillegg $b|a$ må vi ha at $a = b$.

   Transitiv: Anta $a|b$ og $b|c$. Da finnes det heltall s og t slik at $b = sa$ og $c = tb$, så $c = (ts)a$. Dermed deler a c.



   Mulige topologiske sorteringer:

$$\begin{gathered} 2 \prec 5 \prec 10 \prec 20 \prec 30 \\ 2 \prec 5 \prec 10 \prec 30 \prec 20 \\ 5 \prec 2 \prec 10 \prec 20 \prec 30 \\ 5 \prec 2 \prec 10 \prec 30 \prec 20 \end{gathered}$$

2. Fermats lille setning forteller oss at $7^{1001} \equiv 7 \pmod{11}$ så vi kan bruke $x \equiv 7 \pmod{11}$ i stedet for den tredje ligningen.

   Vi bruker først den kinesiske restsetningen på de tre første ligningene. Finn først et tall x_1 slik at $x_1 \equiv 2 \pmod 3$ og slik at x_1 er et multipel av $5 \cdot 11 = 55$. 55 er kongruent med 1 modulo 3, så vi kan ta $x_1 = 2 \cdot 55 = 110$. Finn deretter et tall x_2 slik at $x_2 \equiv 3 \pmod 5$ og slik at x_2 er et multipel av $3 \cdot 11 = 33$. 33 er kongruent med 3 modulo 5, så vi kan ta $x_2 = 33$. Finn så et tall x_3 slik at $x_3 \equiv 7 \pmod{11}$ og slik at x_3 er et multipel av $3 \cdot 5 = 15$. 15 er kongruent med 4 modulo 11, og 3 er en invers til 4 modulo 11. Dermed er 3 en invers til 15 modulo 11, så vi kan ta $x_3 = 7 \cdot 3 \cdot 15 = 315$.

   I den første ligningen er x_2 og x_3 kongruente med null, slik at summen $x_1 + x_2 + x_3 = 458$ vil tilfredstille denne ligningen. Tilsvarende vil 458 passe i de to andre ligningene. Den kinesiske restsetningen forteller oss at alle andre tall kongruente med 458 modulo 165

$(3 \cdot 5 \cdot 11 = 165)$ også er løsninger, og at dette er alle løsningene til systemet bestående av de tre første ligningene. Vi får altså

$$x \equiv -37 \pmod{165}.$$

Setter vi dette inn i den siste ligningen finner vi at y må være kongruent med 47 modulo 165.

Dermed har vi at alle løsningspar er par (x, y) som tilfredsstiller at $x \equiv -37 \pmod{165}$ og $y \equiv 47 \pmod{165}$

3. Du har tolv valg for den nederste skiva. Når den er valgt er det 11 muligheter for den andre. For den tredje er det da 11 muligheter (den første blir igjen en mulighet). Dermed får vi $12 \cdot 11 \cdot 11 = 1452$ muligheter.

   En annen fremgangsmåte:

   Det er ikke mulig å ha samme pålegg på alle skivene, siden vi da får likt pålegg på etterfølgende skiver.

   Hvis vi har to pålegg må vi ha to skiver med en type, og en skive med den andre. Den typen vi har to av må komme nederst og øverst. Dermed har vi $12 \cdot 11 = 132$ slike muligheter.

   Hvis det er forskjellig pålegg på alle tre skivene får vi $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ muligheter.

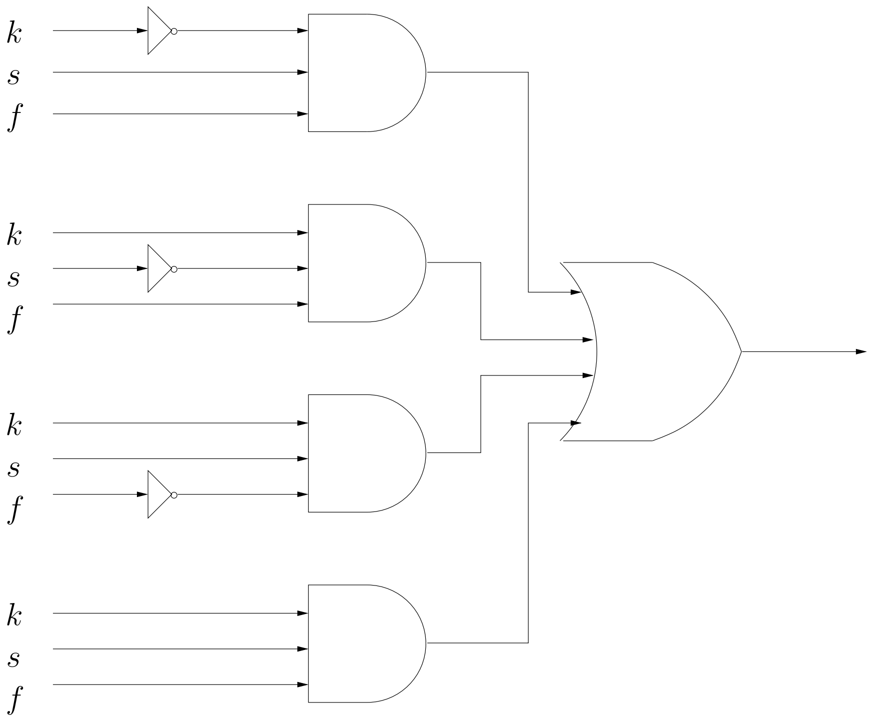
   Dermed har vi totalt 1452 forskjellige slike matpakker.

4. La oss kalle de tre bryterne k, s og f. La oss si at en bryter har verdien 1 når den er på og verdien 0 når den er av.

   La $U(k, s, f)$ være tilstanden til den logiske kretsen, og si at $U = 1$ når vi kan skyte ut, og $U = 0$ ellers. vi kan da se på U som en boolesk funksjon med følgende tabell:

k	s	f	U
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

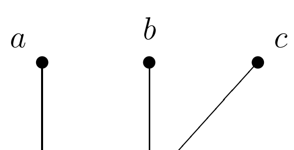
   Fra dette ser vi at vi kan representere U med det booleske uttrykket $\bar{k}sf + k\bar{s}f + ks\bar{f} + ksf$. Dette gir oss den logiske kretsen nedenfor.



5. La $P(n)$ være utsagnet "$(2n)! > 4^n$". $P(2)$ er sant fordi $(2 \cdot 2)! = 4! = 24 > 16 = 4^2$. La oss nå vise induksjonssteget, at $P(n) \to P(n+1)$ er sant for alle $n \geq 2$. Anta at $P(n)$ er sant for en gitt verdi $n \geq 2$. Med andre ord, $(2n)! > 4^n$. Da får vi $(2(n+1))! = (2n+2)(2n+1)(2n)! > (2n+2)(2n+1)4^n > 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}$. Den første ulikheten følger fra antagelsen, den andre fra at $(2n+2) > 4$ og $(2n+1) > 1$. Ved matematisk induksjon har vi dermed at $P(n)$ er sant for alle $n \geq 2$, så $(2n)! > 4^n$ for alle $n \geq 2$.

6. S har et hjørne med grad 4, nemlig w. Alle hjørnene i G bortsett fra e har lavere grad, og e har grad 4. Dermed må vi beholde alle kantene som berører e. For å få et tre må vi da fjerne kantene bc og fc. Ved å fjerne enten ab eller ad, men ikke begge, får vi et tre. Begge disse trærene er isomorfe med S. La oss si vi fjernet ab. Da sitter vi igjen med følgende utspennende tre:

   T :

   Ved å se på grader ser vi at vi må ha $f : T \to S$ må vi ha $f(e) = w$ og $f(d) = u$. Den

siste tingen vi må ta hensyn til er at a er nabo med d og v er nabo med u. Resten kan vi sette sammen som det passer oss. For eksempel er følgende en isomorfi:
$f(a) = v$
$f(b) = x$
$f(c) = y$
$f(d) = u$
$f(e) = w$
$f(f) = z$

7. (a) B og C er tautologier, så svaret er A og D. (Bruk f.eks. sannhetstabeller til å se at disse kan være både sanne og usanne, avhengig av p og q.)

   (b) Per definisjon av symmetrisk tillukning er denne S symmetrisk. La oss anta at matrisen er relativ til alfabetisk ordning på elementene. Da har vi for eksempel er (c, c) ikke med i S, så S er ikke refleksiv. For eksempel er (b, a) med i S (siden (a, b) er med i R) og (a, d) er med i S, men (b, d) er ikke med i S. Dermed er S ikke transitiv. Så riktig svar er B.

   (c) Løsningene til den tilhørende homogene rekurensrelasjonen $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ er på formen $h_n = A(-1)^n + B2^n$, der A og B er reelle tall. Ved å sette inn $4n+10$ ser vi at dette er en løsning, så alle løsninger må være på formen $a_n = A(-1)^n + B2^n + 4n + 10$. Dermed er svarene D og E riktige (A, B og C er løsninger til relasjonen).

   (d) Ved hjelp av adressene til bladene kan vi tegne hele treet. For eksempel ser vi at roten har to barn. Siden 2.3.1.2 er et blad må vi ha et hjørne med adresse 2.3.1.1, så vi må ha blader med adresse som starter med 2.3.1.1. Dette finnes ikke i lista, så D er riktig svar.

   (e) De eneste måtene å lese ordet på er å gå til s_1, så s_0, så s_1, så s_0 og til slutt s_1, eller s_1, så s_0, så s_1, så s_0 og til slutt s_2. Dermed er riktig svar B og C.

   (f) Ord i $L(G)$ og i $L(M)$ starter på 1, mens det finnes ingen slik begrensning på ord i L, så L er ikke lik noen av dem. Ordet 11 er med i $L(G)$, men ikke i $L(M)$, så riktig svar er D.

   (g) G er en regulær grammatikk, så vi vet at $L(G)$ kan gjennkjennes av en deterministisk endelig-tilstandsautomat. Vi vet at mengder som gjennkjennes av ikkedeterministiske endelig-tilstands automater også kan gjennkjennes av deterministiske. L gjennkjennes for eksempel av automaten under. Dermed er riktig svar D.