Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Marius Irgens 92 81 23 87

EKSAMEN I FAG TMA4140 DISKRET MATEMATIKK

Tirsdag 16. desember 2003
Tid : 0900-1300

Tillatte hjelpemidler (Kode C): Enkel kalkulator (HP30S);
Rottmann: Matematisk formelsamling.

Sensurfrist: 16. januar 2004

Instruksjoner:
Oppgavesettet består av 5 sider og har to deler. Det er studentens ansvar å sjekke ved eksamensstart at alle arkene er mottatt.

Del I:

1. Del I består av 6 oppgaver. Svarene på disse skal begrunnes.
2. Det skal gå tydelig frem av begrunnelsen og mellomregningene hva som har vært gjort og hvorfor dette er riktig. Det må gå tydelig frem fra besvarelsen hva sluttresultatet (sluttresultatene) er. Har du bare en delvis løsning bør det gå tydelig frem fra besvarelsen hva du har løst og hvorfor dette er relevant.

Del II:

1. Del II er en oppgave med 7 flervalgsspørsmål. Svarene skal ikke begrunnes.
2. Det er totalt 10 riktige svaralternativer og 20 gale.
3. Hvert spørsmål har minst ett riktig svaralternativ, men kan ha flere.
4. Hvert riktig svar gir 2 poeng. Du trekkes ett poeng for hvert svar som er galt.
5. Du kan ikke få mindre enn null poeng på del II som helhet.

DEL I

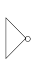
Oppgave 1 (10 poeng)
Relasjonen R på mengden $M = \{2, 5, 10, 20, 30\}$ er gitt ved at aRb når $a|b$ (a deler b). Forklar *kort* hvorfor R er en delvis ordning og tegn Hassediagrammet for R. Hvilke topologiske sorteringer på M følger av R?

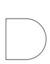
Oppgave 2 (10 poeng)
Finn alle tallpar (x, y) som er løsninger til ligningssettet

$$\begin{cases} x & \equiv & 2 \pmod{3} \\ x & \equiv & 3 \pmod{5} \\ x & \equiv & 7^{1001} \pmod{11} \\ x + y & \equiv & 10 \pmod{165} \end{cases}$$

Oppgave 3 (10 poeng)
Du skal smøre en matpakke med tre skiver. Du har tolv sorter pålegg. Du vil ikke ha to skiver med samme pålegget rett etter hverandre i matpakken. To matpakker med den samme påleggskombinasjonen regnes som forskjellige hvis pålegget kommer i forskjellige rekkefølger. Det vil si at for eksempel matpakken *pålegg1—pålegg2—pålegg3* er forskjellig fra matpakken *pålegg3—pålegg2—pålegg1*. Du kan bare ta ett pålegg på hver skive. Hvor mange forskjellige matpakker kan du lage?

Oppgave 4 (10 poeng)
Forskere i Lalaland har nylig kommet frem til et nytt våpen, fredsbomben. Kongen, statsministeren og fredsministeren har hver sin fredsbryter. Disse bryterne er koblet til en logisk krets, som igjen er koblet til utskytningsrampen. Bomben kan skytes ut hvis og bare hvis *minst* to av bryterne er på. Tegn en logisk krets som fungerer som den som er beskrevet her. Bruk følgende symboler:

 Boolesk komplement

 Boolesk produkt av det som kommer inn

 Boolesk sum av det som kommer inn

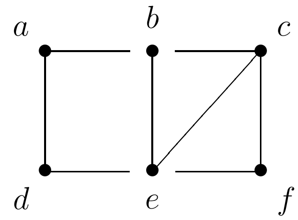
Oppgave 5 (10 poeng)
Bruk matematisk induksjon til å vise at

$$(2n)! > 4^n$$

for alle heltall $n \geq 2$.

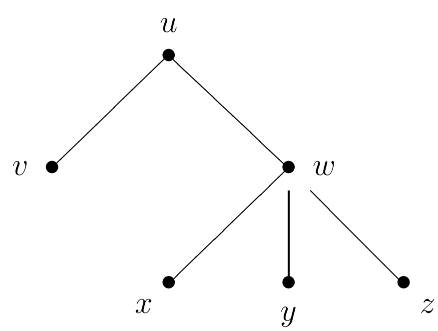
Oppgave 6 (10 poeng)
Grafen G er gitt ved:

G :



Finn et utspennende tre T til G slik at T er isomorf (som graf) med treet S gitt nedenfor. Skriv opp en isomorfi $f : T \to S$.

S :



DEL II

Oppgave 7 (20 poeng)
Denne oppgaven har 7 flervalgsspørsmål. Vi minner om følgende:

- Det er 10 riktige svaralternativer og 20 gale.
- Hver del har minst ett riktig svaralternativ, men kan ha flere.
- Hvert riktig svar gir 2 poeng. Du trekkes ett poeng for hvert svar som er galt.

a) Hvilke av utsagnene under er **hverken** tautologier eller selvmotsigelser?

A: $p \to (\neg q \wedge q)$ **B:** $p \to (\neg q \vee q)$ **C:** $(p \wedge q \wedge r) \to (p \vee q \vee r)$
D: $(p \to q) \leftrightarrow (q \to p)$

b) En relasjon R på mengden $\{a, b, c, d, e\}$ er gitt ved nabomatrisen (adjacency matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La S være den *symmetriske tillukningen* til R. Da **har** S hvilke av følgende egenskaper?

A: refleksiv **B:** symmetrisk **C:** transitiv
D: S er hverken refleksiv, symmetrisk eller transitiv

c) Hvilke av uttrykkene under er **ikke** løsninger til rekurensrelasjonen

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - 8n$$

A: $4n + 10$ **B:** $4n - 2^n + 10$ **C:** $-7(-1)^n + 10 + 4n$
D: $(-1)^n + 2^n$ **E:** $-4n - 10$

d) For et gitt ordnet tre med rot er listen av de universelle adressene til alle **bladene** som følger: 1.1.1, 1.1.2.1, 1.1.2.2, 1.1.2.3, 2.1.1, 2.2.1.1, 2.x.y.z, 2.3.1.2, 2.4. Det er med andre ord tre ukjente siffer. Da har vi at (x, y, z) er lik

A: $(1, 1, 1)$ **B:** $(2, 2, 1)$ **C:** $(1, 1, 2)$ **D:** $(3, 1, 1)$

De tre siste delene av denne oppgaven vil referere til følgende:

$I = \{0, 1\}$

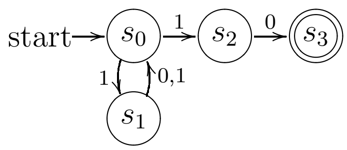
L er språket over I som består av strenger som ender på 01.

$L(G)$ er språket generert av grammatikken $G = (V, I, S, P)$ der $V = \{S, A, B, C\} \cup I$ og produksjonene er gitt på Backus–Naur form ved

$\langle S\rangle ::= 1\langle A\rangle \mid 1\langle B\rangle$
$\langle A\rangle ::= 0\langle C\rangle \mid 0$
$\langle B\rangle ::= 1$
$\langle C\rangle ::= 1\langle A\rangle$

$L(M)$ er språket som godkjennes av automaten M beskrevet av grafen under.

M :



e) Hvilke tilstander i M kan vi komme til ved å lese ordet $w = 11101$?

A: s_0 **B:** s_1 **C:** s_2 **D:** s_3
E: Ordet w leder ikke til noen tilstander i M.

f) Hvilke av utsagnene under er sanne?

A: $L = L(M)$ **B:** $L = L(G)$ **C:** $L(G) = L(M)$
D: Ingen av utsagnene i A, B eller C er sanne.

g) For hvor mange av språkene L, $L(M)$ og $L(G)$ finnes det deterministiske endelig-tilstands automater som godkjenner dem?

A: 0 **B:** 1 **C:** 2 **D:** 3