Løsningsforslag kontinuasjonseksamen TMA4140 Diskret matematikk, 13. august 2004.

1. Euklids algoritme med 11 og 26 gir oss $26 = 11 \cdot 2 + 4$, $11 = 2 \cdot 4 + 3$, $4 = 3 + 1$. Dette gir $1 = 4 - 3 = 4 - (11 - 2 \cdot 4) = 3 \cdot 4 - 11 = 3(26 - 11 \cdot 2) - 11 = 3 \cdot 26 - 7 \cdot 11$. Dette viser at -7 er en invers til 11 modulo 26.

   Vi har tre ligninger med to ukjente. La oss se om en mulig løsning allerede er bestemt av to av ligningene. La oss se på de to siste. Ved å multiplisere den siste med tre og legge dette til hver side av den andre ligningen får vi $11x \equiv 11 \pmod{26}$. Vi ser av dette at x må være kongruent med 1 modulo 26. (Vi kunne godt brukt inversen til 11 her, men den er kanskje mer nyttig hvis vi hadde sett på de to første ligningene.) Setter vi dette inn i den tredje ligningen, ser vi at y må være kongruent med null modulo 26. Setter vi dette inn i den første ligningen får vi at 5 er kongruent med 1 modulo 26. Siden dette ikke er sant, finnes det ikke noen løsning på ligningssettet.

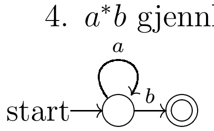
2. La oss skrive $L = \{2, 4, 6, \ldots, 2004\}$, $M = \{x \in L;\ 8|x\}$ og $N = \{x \in L;\ 11|x\}$. Vi er ute etter å finne $|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$. Fordi 8 og 11 er relativt primiske (de har ingen felles faktorer), har vi at $M \cap N = \{x \in L;\ 88|x\}$.

   Fordi elementene i L kan skrives som $2x$ der x er et heltall mellom 1 og 1002, ser vi at det er 250 tall i L som er delelige med 8, 91 tall som er delelige med 11 og 22 som er delelige med 88. ($1002 : 4 = 250 + 2/4$, $1002 : 11 = 91 + 1/11$, $1002 : 44 = 22 + 34/44$.) Det er derfor $250 + 91 - 22 = 319$ elementer i L som enten er delelige med 8, 11 eller begge.

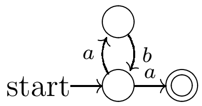
3. Å endre $\vee$'en til $\wedge$ gjør bare vondt verre, endrer vi derimot $\vee$ til $\rightarrow$ får vi en tautologi. Vi kan se dette f.eks. fra en sannhetstabell.

   Et annet alternativ er å beholde $\vee$. Da må vi få $[\cdots]$ til å være sann når q er usann, uavhengig av sannhetsverdien til p. Skal dette kunne skje må vi endre på $\wedge$. Å endre $\wedge$ til $\rightarrow$ går ikke, men endrer vi $\wedge$ til $\vee$ får vi igjen en tautologi. Mulige svar på oppgaven er derfor $[p \vee (p \rightarrow q)] \vee q$ og $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$.

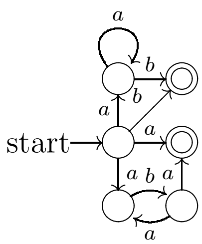
4. a^*b gjennkjennes av



   $(ab)^*a$ gjennkjennes av



Setter vi disse sammen ser vi at $a^*b \cup (ab)^*a$ gjennkjennes av



5. La $P(n)$ være påstanden $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3}$. Vi må vise to ting for å kunne anvende induksjon:

   Er $P(1)$ sann?
   Ved å sette inn $n = 1$ får vi 1 på begge sider, så $P(1)$ er sann.

   Følger $P(k+1)$ fra $P(k)$?
   Anta at $P(k)$ er sann for en gitt, men uspesifisert k, m.a.o. $\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 = \frac{4k^3-k}{3}$. (Det er denne antagelsen vi kaller induksjonshypotesen.) La oss nå se på $P(k+1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 &= \sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{4k^3-k}{3} + (2k+1)^2 \\ &= \frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3} = \frac{4(k+1)^3-(k+1)}{3}\end{aligned}$$

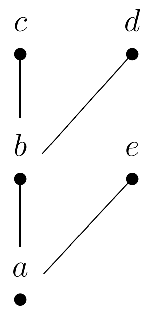
   Den andre likheten følger fra induksjonshypotesen, den siste følger fra litt regning, eller kan sjekkes ved å regne ut det som står på høyre hånd. Dermed har vi at $P(k)$ medfører $P(k+1)$.

   Dermed forteller induksjonsprinsippet oss at formelen er sann for alle naturlige tall.

6. Ved opptelling ser vi at G og H har like mange hjørner og kanter. Vi finner også at begge har to hjørner med grad 3 og fire hjørner med grad 4. Så langt er vi fristet til å tro at de kanskje er isomorfe. Men ser vi på hjørnene med grad 3 ser vi at 1 og 4 er naboer i H, men b og d er ikke naboer i G. Dermed kan ikke grafene være isomorfe.

7. S er antisymmetrisk. Etter å ha tatt den refleksive og transitive tillukningen til S har vi fremdeles noe som er antisymmetrisk, og som nå også er

refleksivt og transitivt. Derfor er R en delvis ordning. Hassediagrammet til R kan vi tegne nesten rett fra S:



8. 2.2.1 skulle vært 2.1.1, eller 2.1.3 skulle vært 2.1.1.