MA2201/TMA4150
Vår 2012

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 0

1 **a)** $A \times A = \{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y)\}$
$A \times B = \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,x),(y,y),(y,z)\}$

b)

$$\sum_{n=0}^{|A\times B|} \binom{|A \times B|}{n} = 2^{|A\times B|} = 64$$

c) Det finnes $2^4 = 16$ mulige binæroperasjoner på A og $3^9 = 19683$ binæroperasjoner på B.

d) Det er $3^2 = 9$ funksjoner fra A til B. 6 er 1-1, ingen er på og ingen er isomorfier. Det er $2^3 = 8$ funksjoner fra B til A. Ingen er 1-1, 6 er på og ingen er isomorfier.

e) Det finnes 27 funksjoner fra B til B. Av disse er 6 stykker 1-1, på og isomorfier.

2 **a)** Anta at $a \equiv b \pmod n$ og $b \equiv c \pmod n$. Da vet vi at det eksisterer heltall r, s slik at $a = b + rn$, $b = c + sn$. Dermed får vi at

$$a = b + rn = c + rn + sn = c + (r + s)n,$$

og dermed har vi at $a \equiv c \pmod n$

b) Beviset er en mindre generell versjon av beviset i **c)**.

c) Anta at $m, n \in \mathbb{Z}$ og $n > 0$. Ved å betrakte tallinjen, ser vi at det må eksistere et heltall q slik at

$$qn \leq m < (q + 1)n.$$

Hvis $qn = m$, kan vi velge $r = 0$. Hvis derimot $qn \neq m$ velger vi $r = m - qn$. Vi har da $m = qn + r$ og $0 \leq r < n$.

For å vise unikhet av q og r, anta at $qn + r = m = pn + s$, der $0 \leq s, r < n$. Da har vi at $qn = pn + s - r$. Siden $-n < s - r < n$ og $n | s - r$, må vi ha $s = r$. Vi ser da at $qn = pn$, så dermed er $q = p$.

Se eventuelt 6.3, side 60 i boka.

d) Anta at $a \equiv b \pmod n$

La r være resten når a deles på n; da vet vi at $n|(a - r)$. Dermed har vi at $a \equiv r \pmod n$, og dermed at $b \equiv r \pmod n$. Da må $n|(b - r)$, og vi kan skrive $b = qn + r$; dermed er r også resten til b.

Omvendt, anta at r er resten både når a deles på n og når b deles på n. Vi ser da at $(a - r)|n$ og at $(r - b)|n$. Dermed er $a \equiv r \pmod n$ og $r \equiv b \pmod n$. Det følger fra **a)** at $a \equiv b \pmod n$.