Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA2201/TMA4150
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 10

Seksjon 18

$\boxed{23}$ La $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ være en ringhomomorfi. Vi vet at vi må ha at $\phi(1)^2 = \phi(1^2) = \phi(1)$. Dermed må vi enten ha $\phi(1) = 0$ eller $\phi(1) = 1$.

Dersom $\phi(1) = 0$ må vi for $n > 0$ ha

$$\phi(n) = \phi(1 + \ldots + 1) = \phi(1) + \ldots + \phi(1) = 0$$

og for $n < 0$ ha

$$\phi(n) = -\phi(-n) = 0.$$

Dermed er ϕ nullhomomorfien.

Dersom $\phi(1) = 1$ må vi for $n > 0$ ha

$$\phi(n) = \phi(1 + \ldots + 1) = \phi(1) + \ldots + \phi(1) = 1 + \ldots + 1 = n$$

og for $n < 0$ ha

$$\phi(n) = -\phi(-n) = -(-n) = n.$$

Dermed er ϕ identitetshomomorfien.

$\boxed{34}$ Vi husker at for to funksjoner med samme definisjonsområde så er $f = g$ hvis og bare hvis $f(x) = g(x)$ for alle x i definisjonsområdet.

Aksiom 2:

$$\begin{aligned}((fg)h)(x) =& (fg)(x)h(x) = (f(x)g(x))h(x)\\ =& f(x)(g(x)h(x)) = f(x)(gh(x)) = (f(gh))(x),\end{aligned}$$

dermed er $(fg)h = f(gh)$.

Aksiom 3:

$$\begin{aligned}(f(g+h))(x) =& f(x)(g+h)(x) = f(x)g(x) + f(x)h(x)\\ =& (fg)(x) + (fh)(x) = (fg + fh)(x)\end{aligned}$$

Den høyre distributive loven kan vises på en tilsvarende måte.

$\boxed{38}$ Hvis $ab = ba$, så har vi $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Motsatt, anta at $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ Da har vi at $= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$, og dermed $-ab + ba = 0$ og til slutt $ab = ba$.

$\boxed{55}$

$$a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b.$$

Vi trekker fra a og b på begge sider og får $ab = -ba$.

La nå $a = b$; da har vi at $a = a^2 = aa = -aa = -a^2 = -a$. Dermed må $ab = -ba = ba$.

Seksjon 19

$\boxed{2}$ Siden både 7 og 23 er primtall er $\mathbb{Z}_7$ og $\mathbb{Z}_{23}$ begge kropper.

Vi ser først på $\mathbb{Z}_7$. Der er $3^{-1} = 5$. Dermed har vi at $3x = 2 \Rightarrow x = 5 \cdot 2 = 3$.

Vi ser så på $\mathbb{Z}_{23}$. Der er $3^{-1} = 8$. Dermed har vi at $3x = 2 \Rightarrow x = 8 \cdot 2 = 16$.