Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 1

Fra boka

30

a) Vi observerer at hvis a og b er i $\mathbb{R}^*$ er også $a * b$ i $\mathbb{R}^*$, så dette er en binæroperasjon på $\mathbb{R}^*$. Vi sjekker så assosiativitet:

$$(a * b) * c = (|a|b) * c = |ab|c = |a|(b * c) = a * (b * c)$$

b) Som venstreidentitet kan vi velge $e = 1$ eller $e' = -1$. Vi velger $e = 1$.

For $a \in \mathbb{R}^*$ er høyreinversen $a' = \frac{1}{|a|}$ (hvis vi hadde valgt $e' = -1$ som identitet, ville inversen til a blitt $-\frac{1}{|a|}$)

c) $\mathbb{R}^*$ er ikke en gruppe med denne binæroperasjonen, fordi vi ikke har noen høyreidentitet; det finnes ikke noe element e slik at $a * e = a$ for enhver $a \in \mathbb{R}^*$.

d) Denne oppgaven er interessant fordi vi tidligere i boka (samt i oppgave 38) har sett at dersom vi har en venstreidentitet og en *venstre*invers, vil vi oppfylle gruppeaksiomene.

38 Vi sjekker gruppeaksiomene som gitt i boka.

$\mathcal{G}1$: Følger direkte fra de nye aksiomene".

$\mathcal{G}2$: Vi har en venstreidentitet e, vi sjekker at denne også er høyreidentitet. Vi observerer at for $x \in G$, med venstreinvers x', så holder

$$x'(xe) = (x'x)e = e = x'x.$$

Vi vet at x' har en venstreinvers, så vi ganger med denne på begge sider av ligningen:

$$xe = x,$$

og e er også en tosidig identitet.

$\mathcal{G}3$: Vi ser at

$$(xx')(xx') = x(x'x)x' = xx'.$$

Om vi ganger med venstreinversen av xx' på venstre side får vi:

$$xx' = e$$

og x' er en tosidig invers.

Oppgaver gitt på øving

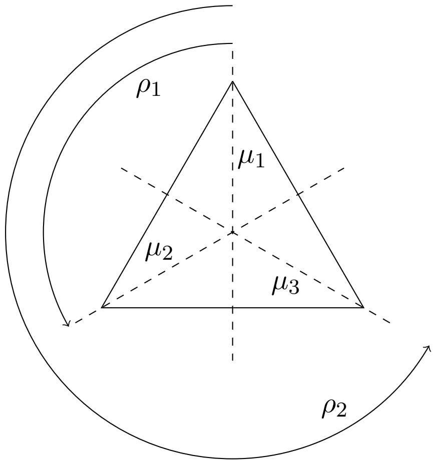
$\boxed{1}$ **a)** Alle permutasjoner på en mengde A (bijeksjoner $A \to A$) utgjør igjen en mengde. Vi ser at om vi setter sammen to permutasjoner får vi igjen en permutasjon på A (om f og g er bijeksjoner så er også komposisjonen $f \circ g$ en bijeksjon). Dermed har vi en binæroperasjon på mengden av permutasjoner på A. Vi sjekker at denne oppfyller gruppeaksiomene:

$\mathcal{G}1$: Sammensetning av funksjoner er assosiativt.

$\mathcal{G}2$: Identitetsavbildningen i er selv en permutasjon, og for enhver permutasjon p så har vi $pi = p = ip$.

$\mathcal{G}3$: Siden en permutasjon er en bijeksjon, har enhver permutasjon en invers, som selv er en bijeksjon/permutasjon.

b) Det finnes seks permutasjoner på $A = \{x, y, z\}$, og det finnes seks symmetrier på et triangel (se illustrasjon, og husk at å holde figuren i ro også er en symmetri).



Vi får da følgende isomorfitabell, der vi benevner isomorfiene ved å fortelle hva de sender henholdsvis x, y og z til:

permutasjon			symmetri
x	y	z	
x	y	z	ρ_0
y	z	x	ρ_1
z	x	y	ρ_2
x	z	y	μ_1
z	y	x	μ_2
y	x	z	μ_3

$\boxed{2}$ **a)** Se eksempel 8.10 side 79-80 i boka.

b) Se tabell 8.12 side 80 i boka.