Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 3

Seksjon 6

$\boxed{36}$ En uendelig syklisk gruppe G vil være isomorf med $\mathbb{Z}$; la $\phi : G \to \mathbb{Z}$ være en isomorfi. Hvis g er en generator i G, vil $\phi(g)$ være en generator i $\mathbb{Z}$. Men Z har kun to generatorer (-1 og 1), så G kan ikke ha fire generatorer.

$\boxed{53}$ La G være en syklisk gruppe av orden $n < \infty$, og la m være et heltall som deler n. La e betegne identitetselementet i G og la a være en generator for g

Alle elementer i G kan skrives som a^r for et eller annet heltall r. Observer at $(a^r)^m = e = a^0$ betyr at $rm = 0 \mod n$, så vi har at $rm = kn$ for et heltall k. Siden m deler n kan vi skrive dette om som $r = \frac{kn}{m}$, og vi får at enhver løsning av $x^m = e$ er på formen $a^{\frac{kn}{m}}$. Det finnes eksakt m distinkte slike løsninger, vi kan får disse ved å sette $k = 1, \ldots, m$.

Seksjon 8

$\boxed{47}$ Anta at $n \geq 3$, og la $\sigma \in S_n$ være slik at $\sigma\gamma = \gamma\sigma$ for alle $\gamma \in S_n$.

Definer $z, x \in \{1, \ldots, n\}$ ved at $\sigma(z) = 1$ og $\sigma(1) = x$. Det finnes (minst) en permutasjon $\gamma \in S_n$ slik at $\gamma(z) = 1$ $\gamma(1) = z$. Da har vi at $x = \sigma\gamma(z) = \gamma\sigma(z) = z$.

Anta at $z = x \neq 1$: da vet vi at det finnes (minst) en permutasjon γ' slik at $\gamma'(1) = 1$ og $\gamma'(z) = y \neq z$. Da har vi at $x = \sigma\gamma'(1) = \gamma'\sigma'(1) = y$, men dette er en selvmotsigelse. Altså må $x = 1$, og dermed er $\sigma(1) = 1$.

Vi kan gjenta dette argumentet for $2, \ldots, n$, og vi ser at at σ må være identitetspermustasjonen på $\{1, \ldots, n\}$