Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA2201/TMA4150
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 4

Seksjon 9

27 Vi betrakter S_n for $n \geq 3$.

a) En permutasjon $\sigma \in \S_n$ kan skrives som en sammensetning av m disjunkte sykler, der sykel i har lengde l_i, slik at $\sum_{i=1}^{m} l_i = n$. (Her regnes 1-sykler med).
En sykel av lengde l kan skrives som en sum av $l-1$ transposisjoner, og σ kan dermed skrives som en sammensetning av $\sum_{i=1}^{m}(l_i - 1) = n - m \leq n - 1$ transposisjoner.

b) Når vi trenger $n-1$ transposisjoner for å beskrive σ, så vil det si at $m = 1$, $l_1 = n$, og dermed at σ er en sykel.
En permutasjon som ikke er en sykel kan dermed skrives som et produkt av høyst $n-2$ transposisjoner.

34 La σ være en sykel av odde lengde, si $\sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}\}$.
Vi får da at $\sigma^2 = \{a_1, a_3, \ldots, a_{2n+1}, a_2, a_4, \ldots, a_{2n}\}$, så σ^2 er også en sykel.

Seksjon 10

32 Anta at $aH = bH$; siden $1 \in H$ vet vi at $a \in aH = bH$, så $a = bh$ for en $h \in H$. Videre er $a^{-1} = h^{-1}b^{-1}$.
La $h'a^{-1} \in Ha^{-1}$; da har vi at $h'a^{-1} = h'h^{-1}b^{-1} \in Hb^{-1}$, og $Ha^{-1} \subseteq Hb^{-1}$.
Symmetrisk får vi også at $Hb^{-1} \subseteq Ha^{-1}$, og vi har da at $Ha^{-1} = Hb^{-1}$.

34 Merk: Denne oppgaven er identisk med oppgave 2 på arket.
La $|G| = pq$, der p og q er primtall. Vi vet at for enhver ekte undergruppe $H < G$ vil $|H|$ dele $|G|$, så ordenen til H må være 1, p eller q. Vi betrakter hvert tilfelle.

$|H| = 1$**:** Dette gir at $H = \{e\} = \langle e \rangle$. **OK**

$|H| = p$**:** La $x \in H \setminus \{e\}$. Da må $|\langle x \rangle|$ dele $|H|$. Siden $|\langle x \rangle| \neq 1$, må $|\langle x \rangle| = p$. Dermed må vi ha $H = \langle x \rangle$, så H er syklisk og generert av x. **OK.**

$|H| = q$**:** Tilsvarende som for $|H| = p$. **OK.**

Eksamen August 2010

$\boxed{2}$

a) σ har orden fire og er en odde permutasjon.

b) $|H| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

c) $\gamma = (1, 3)(2, 4)$, $\sigma\gamma = (2, 3)$, $\gamma\sigma = (1, 4)$. Hint til siste del av oppgaven: Om du kan finne 13 distinkte elementer i H, så må $H = S_4$.

d) La $\phi(1) = (1, 2, 3, 4)$