Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA2201/TMA4150
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 5

Seksjon 11

$\boxed{47}$ La G være abelsk med identitetselement e, og la $H = \{g \in G | g^2 = e\}$. Vi viser at H er en undergruppe av G:

Lukket: La $g, h \in H$. Da er $(gh)^2 = ghgh = g^2h^2 = e$, så $gh \in H$.

Identitet: $e^2 \in H$, så $e \in H$.

Inverser: Hvis $g \in H$ så vet vi at $gg = e$, slik at $g^{-1} = g \in H$.

$\boxed{48}$ La G være som over, og la H_n være mengden av alle elementer av orden n, samt identitetselementet e.

H_3 vil være en undergruppe

H_4 vil ikke være en undergruppe, for hvis $a \neq e$ er i H_4, så har a^2 orden to og er dermed ikke med i H_4, så H_4 er ikke lukket.

Generelt vil H_n være en undergruppe hvis n er et primtall. Hvis n ikke er et primtall, si $n = pq$ der p og q er heltall, og $e \neq a \in H_n$, så vil a^p ha orden $q \neq n$, slik at H_n ikke er lukket.

$\boxed{49}$ S_3 er et moteksempel; mengden av elementer av orden to (samt identiteten) er ikke lukket.

Mai 2003

$\boxed{1}$ La $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Vi begynner med å observere at $AB = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = BA$. Det betyr at ethvert element i H kan skrives som A^xB^y hvor x, y er heltall. Produktet av to slike elementer blir da:

$$(A^xB^y)(A^{x'}B^{y'}) = A^{x+x'}B^{y+y'} = (A^{x'}B^{y'})(A^xB^y)$$

H er dermed en abelsk undergruppe.

Legg merke til at A har orden 4 og B har orden 5, og for $1 \leq y \leq 4$, finnes det ingen x slik at $A^xB^y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Det betyr at det finnes 20 distinkte elementer som kan skrives på formen A^xB^y, og H har orden 20.

b) Siden $|H| = 20$, så må vi enten ha $H \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ eller $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$. Fra diskusjonen over ser vi at $AB = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ må ha orden 20, slik at H er syklisk. Dermed har vi $H \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$

Desember 2009

$\boxed{1}$ **a)** Det finnes 7 undergrupper av orden 2, og hver av de er generert av ett element $a \neq (0,0,0)$

Det finnes 7 undergrupper av orden 4, og de er alle generert av to elementer a, b der $a \neq b$ og $a \neq (0,0,0) \neq b$. (Man har 7 valg for element a og 6 valg for element b, men må ta hensyn til at $\langle\{a,b\}\rangle = \langle\{b,a\}\rangle$, og at for $(0,0,0) \neq c \in \langle\{a,b\}\rangle$ er $\langle\{a,b\}\rangle = \langle\{a,c\}\rangle = \langle\{b,c\}\rangle$

b) La $g, h \in G$. Vi ser da at

$$\begin{aligned} (gh)(gh) &= e \\ g(gh)(gh)h &= gh \\ (g^2)hg(h^2) &= gh \\ hg &= gh. \end{aligned}$$

c) La G være endelig av orden m. Siden G er abelsk, vet vi at G er isomorf med en gruppe på formen $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r^{n_r}}$ der $p_1, \cdots, p_r$ er primtall (ikke nødvendigvis unike) og $n_1, \cdots, n_r$ er positive heltall

Siden alle elementer i G unntatt identiteten har orden 2, ser vi at $2 = p_1 = \cdots = p_r$ og $1 = n_1 = \cdots = n_r$.