Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 6

Seksjon 13

$\boxed{33}$ Bildet $\phi[\mathbb{Z}_{12}]$ vil være en undergruppe av $\mathbb{Z}_5$. Dermed vil $\phi[\mathbb{Z}_{12}]$ ha orden 5 eller 1. Hvis bildet har orden 1 så er homomorfien triviell, så vi betrakter tilfellet der $\phi[\mathbb{Z}_{12}]$ har orden 5.

Samtidig vet vi at det finnes én-til-én-korrespondanse (isomorfi av mengder) mellom elementene i $\phi[\mathbb{Z}_{12}]$ og restklassene til $\ker\phi$. Da må kjernen til ϕ ha fem restklasser. Dette er ikke mulig, da $(\mathbb{Z}_{12} : \ker\phi) \mid |\mathbb{Z}_{12}| = 12$

$\boxed{44}$ Vi vet at det finnes en én-til-én-korrespondanse (isomorfi av mengder) mellom elementene i $\phi[G]$ og restklassene til $\ker\phi$. Altså har vi at

$$|\phi[G]| = (G : \ker\phi) = |G|/|\ker\phi|,$$

og dermed må $\phi[G]$ være endelig og ha en orden som deler G.

$\boxed{45}$ Vi viser først at $\phi[G]$ er en undergruppe av G':

Lukket La $\phi(g), \phi(g') \in \phi[G]$; da er $\phi(g)\phi(g') = \phi(gg') \in \phi[G]$.

Identitet Siden ϕ er en gruppehomomorfi, vet vi at $e' = \phi(e) \in \phi[G]$ der e og e' er identiteten i henholdsvis G og G'.

Inverser For $\phi(g) \in \phi[G]$ så vet vi at $\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1}) \in \phi[G]$.

Siden $\phi[G]$ er en undergruppe av G' må den også ha en orden som deler G'.

Eksamensoppgaver

$\boxed{\text{August 2007, 1}}$ **a)** Det finnes tre ulike abelske grupper av orden 8, nemlig $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, og $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

b) Vi kan observere at $(1, 1)$ vil være en generator for faktorgruppa, som dermed er syklisk. Da må vi ha $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8/\langle(1, 2)\rangle \cong \mathbb{Z}_8$.

$\boxed{\text{Desember 2010, 1}}$ **a)** Det finnes tre ulike abelske grupper av orden 54, nemlig $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ og $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

b) $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{18}/\langle(3,0)\rangle$ er abelsk og av orden 54. Siden $(0,1)$ har orden 18 kan G ikke være isomorf til $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Siden G ikke er syklisk kan G heller ikke være isomorf med $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{27}$. Dermed må vi ha $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$.

Alternativt kan vi bruke homomorfien $\phi : \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{18}$ definert ved $\phi(x,y) = (x \mod 3, y)$ i teorem 14.11 fra boka.

$\boxed{\text{Ekstraoppgave}}$ Vi lar identiteten i G og G' være henholdsvis e og e'.

a) Vi viser at $\phi^{-1} : G' \to G$ er en gruppeisomorfi ved å følge instruksjonene på side 132 i boka.

La $a', b' \in G'$, og la $a, b \in G$ være slik at $\phi(a) = a'$ og $\phi(b) = b'$ (at a og b eksisterer og er unike vet vi fordi ϕ er en gruppeisomorfi). Da har vi at

$$\phi^{-1}(a'b') = \phi^{-1}(\phi(a)\phi(b)) = \phi^{-1}(\phi(ab)) = ab = \phi^{-1}(a')\phi^{-1}(b'),$$

så ϕ er en gruppehomomorfi.

Kjernen til ϕ^{-1} er {e'}, da $\phi(e) = e'$.

Hvis $a \in G$, så vet vi at $\phi(a) \in G'$, og $\phi^{-1}(\phi(a)) = a$, så bildet til ϕ^{-1} er hele G.

b) Vi observerer først at siden ϕ er en isomorfi, så må g ha uendelig orden hvis og bare hvis $\phi(g)$ har uendelig orden.

Anta nå at g har orden $n < \infty$ og $\phi(g)$ har orden $m < \infty$. Vi ser at

$$\phi(g)^n = \phi(g^n) = \phi(e) = e',$$

så vi må ha $m \leq n$. På den andre siden ser vi at

$$\phi(g^m) = \phi(g)^m = e',$$

og siden ϕ er en gruppeisomorfi må dette bety at $g^m = e$, og dermed at $n \leq m$. Dermed har vi at $m = n$.