MA2201/TMA4150
Vår 2013

Øving 7

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Fra boka:

Seksjon 15: 1, 3, 4, 28, 29, 35, 36 og 40.

Ekstraoppgave La n være et positivt heltall, og la G være mengden av tall mellom 1 og $n-1$ som er relativt primiske til n; altså:

$$G = \{m \in [1, n-1] \,|\, \gcd(n, m) = 1\}.$$

Vis at G er en gruppe under multiplikasjon modulo n.

Eksamen des. 1997: 1 La G være gruppen av alle tall $1 \leq a \leq 39$ som er relativt primiske til 40 under multiplikasjon modulo 40.

a) Finn orden til G.

b) Hvilken abelsk gruppe av form $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r^{n_r}}$, der p_i er (ikke nødvendigvis unike) primtall og n_i er positive heltall, er G isomorf med?
Svaret skal begrunnes.

Eksamen des. 1997: 2 **a)** Vis at hvis H er en gruppe og G er en endelig delmengde av H slik at G er lukket med hensyn på gruppeoperasjon, så er G en undergruppe av H.

Betrakt delmengden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

av gruppen $GL_2(\mathbb{C})$, mengden av 2×2 inverterbare komplekse matriser under vanlig matrisemultiplikasjon, der $i^2 = -1$.

b) Vis at G er en undergruppe av $GL_2(\mathbb{C})$ under vanlig matrisemultiplikasjon.

c) Finn senteret $Z(G)$ til G der

$$Z(G) = \{g \in G | gt = tg \, \forall \, t \in G\},$$

og vis at $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

d) Er G isomorf med D_4? Svaret skal begrunnes.