Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 7

Oppgaver fra boka, seksjon 15

$\boxed{4}$ Siden $|\mathbb{Z}_4 \times Z_8| = 32$ og $|\langle(1,2)\rangle| = 4$, så må $|\mathbb{Z}_4 \times Z_8/\langle(1,2)\rangle| = 8$. Siden elementet $(0,1) + \langle(1,2)\rangle$ har orden 8, må da $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8/\langle(1,2)\rangle \cong \mathbb{Z}_8$.

$\boxed{28}$ Et eksempel er $G = \mathbb{Z}$, $H = n\mathbb{Z}$; da er $G/H = \mathbb{Z}_n$.

$\boxed{40}$ Vi viser at HN er en undergruppe ved å sjekke aksiomene for en undergruppe.

Vi kommer til å bruke at siden N er en normal undergruppe, så er $gN = Ng$ for enhver $g \in G$. Det betyr at gitt $g \in G$, $n \in N$, så vil $ng = gn'$, der $n' \in N$.

Lukket La hn og $h'n'$ være vilkårlige elementer i HN (slik at $h, h' \in H$ og $n, n' \in N$). Da har vi at:

$$(hn)(h'n') = h(nh')n' = h(h'n'')n' = (hh')(n''n') \in HN$$

(vi har brukt at $n'' \in N$ og at H og N er lukket).

Identitet La e være identitetselementet i G Siden N og H er undergrupper av G, må $e \in N$ og $e \in H$. Dermed er også $e \in HN$.

Inverser La $hn \in HN$ (igjen slik at $h \in H$ og $n \in N$). Da har vi at

$$(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}n' \in HN.$$

Til slutt ser vi at dersom en undergruppe av G inneholder både H og N, må den, på grunn av kravet om lukkethet, inneholde HN. Dermed er HN den minste undergruppen som inneholder både H og N.

Ekstraoppgave

$\boxed{*}$ Vi vet at $x, y \in \mathbb{Z}$ er relativt primske hviss det finnes $a, b \in Z$ slik at $xa + yb = 1$.

Vi sjekker at G er en gruppe ved å gå igjennom gruppeaksiomene:

Binæroperasjon La $g, h \in G$; da finnes $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ slik at $ag + bn = 1 = ch + dn$. Dermed har vi at $1 = (ag + bn)(ch + dn) = a'(gh) + b'n$, med $a', b' \in \mathbb{Z}$. Dette viser videre at dersom $gh \equiv q \mod n$, med $1 \leq q \leq n-1$, så er q relativt primsk til n, slik at $q \in G$. Multiplikasjon modulo n er derfor en binæroperasjon på mengden.

Assosiativ Multiplikasjon modulo n er assosiativt fordi vanlig multiplikasjon er det.

Identitet $\gcd(1,n) = 1$, så $1 \in G$.

Inverser Om $g \in G$, så vet vi at det finnes a, b slik at $ag + bn = 1$. La $a \equiv q \mod n$, med $1 \le q \le n$, så vil også $qx + b'n = 1$ for en $b \in \mathbb{Z}$; dermed er $q = g^{-1}$.

Eksamen desember 2007

$\boxed{1}$ **a)** Vi kan enten telle, eller bruke eulers totientfunksjon:

$$|G| = \phi(40) = 40 \prod_{p|40} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 40 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}\right) = 16.$$

b) Vi går igjennom de mulige abelske gruppene av orden 16. Merk at G inneholder 7 elementer av orden 2: $\{9, 11, 19, 21, 29, 31, 39\}$.

$\mathbb{Z}_{16}$ Umulig, da G ikke er syklisk

$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ Umulig, G har for mange elementer av orden 2

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ Umulig, G har for mange elementer av orden 2

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ Dette gjenstår som den eneste muligheten.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ Umulig, det finnes elementer av orden 4 i G.

Altså har vi $G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

$\boxed{2}$ **a)** Vi trenger å vise at G har identitet og inverser.
La $g \in G$; siden G er lukket, må $g^n \in G$ for alle $n \ge 1$. Siden G er endelig, må det da finnes to heltall n, m slik at $m < n$ og $g^n = g^m$. Da Ser vi at $g^m g^{n-m} = g^m$, og dermed er $g^{n-m} = e$, identiteten på H.
Videre ser vi at $g^{n-m-1} g = g^{n-m} = e$, dermed er inversen til g i G.

b) Det er her nok å vise at G er lukket under multiplikasjon.
Hint: For en matrise $A \in G$, beregn $A \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$

c) Vi observerer at $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ og $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in Z(G)$. Videre ser vi at

$$\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right) \neq -\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right).$$

Dermed kan hverken $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ eller $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ være i $Z(G)$. Siden

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

kan heller ikke $\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ eller $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ være i $Z(G)$.
Dermed har vi at $Z(G) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$.
Merk at for alle $g \in G$, så er g^2 i $Z(G)$. $G/Z(G)$ er da en gruppe med bare idempotente elementer, og dermed abelsk (jfr seksjon 4, oppgave 32; denne ble gitt på øving 1). Siden $|G/Z(G)| = |G|/|Z(G)| = 4$, så må $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

d) G har to elementer av orden 2. D_4 har fem elementer av orden 2. Gruppene kan derfor ikke være isomorfe.