Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA2201/TMA4150
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 8

Kapittel 16

$\boxed{10}$ **a)** **Ja**, fordi det eneste elementet i D_4 som etterlater alle elementer i X uforandret er ρ_0, identitetetselementet.

b) Det oppgaven spør etter er hvilke baner som er slik at når vi lar D_4 virke på de, så er det bare ρ_0 som etterlater alle elementene uforandret. Det blir $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ og $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.

Eksamensoppgaver

$\boxed{\text{mai 2004, 1}}$ **a)** Se side 80 i boka; vi vil bruke den samme notasjonen her.

b) For hvert permutasjon $\sigma \in D_4$ noterer vi hvor mange fargelegginger som ikke blir endret av σ.

σ	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
$\lvert X_\sigma \rvert$	3^4	3	3^2	3	3^2	3^2	3^3	3^3

Antall distinkte fargelegginger er da i følge Burnsides formel:

$$\frac{1}{D_4} \sum_{\sigma \in D_4} |X_\sigma| = 21$$

$\boxed{\text{mai 2005, 5}}$ La X være mengden av mulige fargelegginger; $|X| = 2^9$. Vi ser på antall invariante fargelegginger som er invariante under hver rotasjon av teppet:

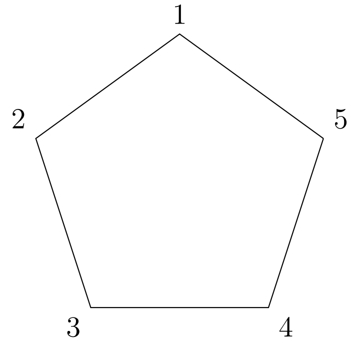
σ	$\lvert X_\sigma \rvert$	Forklaring
ρ_0	2^9	Identitetsrotasjonen etterlater alle fargelegginger uendret
ρ_1	2^3	En fargelegging endres ikke av å roteres 90 grader dersom felt 1, 3, 7, 9 og 2, 4, 6, 8 har samme farge
ρ_2	2^5	En fargelegging endres ikke av å roteres 90 grader dersom felt 1 og 9, 2 og 8, 3 og 7 og 4 og 6 har samme farge
ρ_3	2^3	Se ρ_1

Antall fargelegginger blir da, med Burnsides formel:

$$\frac{1}{G} \sum_{\sigma \in G} |X_\sigma| = \frac{1}{4}(2^9 + 2^3 + 2^4 + 2^3) = 140$$

mai 2006, 4

a) For senere referanse tegner vi opp femkanten og navngir hjørnene.



Symmetrigruppen til femkanten, D_5 består av fem rotasjoner og fem speilinger. Vi noterer de her som disjunkte sykler.

rotasjoner:	**speilinger:**
$\rho_0 = (1)$	$\mu_1 = (25)(34)$
$\rho_1 = (1,2,3,4,5)$	$\mu_2 = (13)(45)$
$\rho_2 = (1,3,5,2,4)$	$\mu_3 = (15)(24)$
$\rho_3 = (1,4,2,5,3)$	$\mu_4 = (12)(35)$
$\rho_4 = (1,5,4,3,2)$	$\mu_5 = (14)(23)$

b) La X være mengden av alle mulige fargelegginger: $|X| = 3^5$. Vi teller mengdene av fargelegginger som er invariante for hver permutasjon i symmetrigruppen

- ρ_0 etterlater alle fargelegginger uendret, så $|X_{\rho_0}| = 3^5$
- For $1 \leq i \leq 4$, vil ρ_i kun etterlate en fargelegging uendret dersom alle sider har samme farge. Altså er $|X_{\rho_i}| = 3$
- For $1 \leq j \leq 5$, vil μ_j kun etterlate en fargelegging uendret dersom to og to sider har samme farge (siden speilingsaksen går igjennom er ikke medregnet her). Altså er $|X_{\mu_j}| = 3^3$.

Ved Burnsides formel blir da antall fargelegginger

$$\frac{1}{|D_5|} \sum_{\sigma \in D_5} |X_\sigma| = 39.$$