Løsningsforslag — Øving

Seksjon 36

16 Vi antar at G er en gruppe av orden mp^n, der p er et primtall og $p \nmid m$. Videre lar vi P være en Sylow p-undergruppe av G, og H en p-undergruppe av G.

Vi vet fra første Sylowteorem at det finnes en Sylow p-undergruppe av G som inneholder H. Kall denne undergruppen Q. Videre vet vi fra andre Sylowteorem at P og Q er konjugerte undergrupper, så det eksisterer $g \in G$ slik at $gQg^{-1} = P$.

Siden $H \subseteq Q$ må vi ha $gHg^{-1} \subseteq gQg^{-1} = P$. Da gHg^{-1} er en undergruppe av G er gHg^{-1} også en undergruppe av P.

17 Vi har at $(35)^3 = 5^3 7^3$. Vi vet da at en gruppe av orden $(35)^3$ har n Sylow 5-undergrupper, der $n \equiv 1 \mod 5$ og $n|(35)^3$. Vi ser da at vi må ha $n = 1$. Denne ene Sylow 5-undergruppa vil da være normal, og vil ha orden $5^3 = 125$.

19 Anta $|G| = p^r m$, der p er et primtall og $m < p$.

Vi vet at G har n Sylow p-undergrupper, der $n|p^r m$ og $n \equiv 1 \mod p$. Siden $n \nmid p$ gir den første betingelsen at $n = m$ eller $n = 1$. Siden $m < p$ gir da den andre betingelsen $n = 1$. Det er da kun én Sylow p-undergruppe, og denne må da være normal. G er dermed ikke simpel.

Eksamensoppgaver

mai 2004: 6 Siden $|G| = 12 = 3 \cdot 2^2$, vet vi fra det tredje Sylowteoremet at G har enten 1 eller 4 Sylow 3-undergrupper, og vi vet at en Sylow 3-undergruppe vil ha orden 3.

Om det finnes én Sylow 3-undergruppe er den normal, og G er ikke simpel.

Om det finnes fire Sylow 3-undergrupper vet vi at de er sykliske, og at snittet av to forskellige Sylow 3-undergrupper må være $\{e\}$, der e er identitetselementet. Det må derfor finnes $4 \cdot (3 - 1) = 8$ elementer av orden 3. De resterende fire elementene vil da danne en Sylow 2-undergruppe, som må være normal. G er dermed ikke simpel.

mai 2007: 8 **a)** $|G_1| = 35 = 5 \cdot 7$. Antall Sylow 7-undergrupper er n, der $n|35$ og $n \equiv 1 \mod 7$; altså er $n = 1$. Denne ene gruppen er normal.

b) Anta at $q < p$. Vi vet da at G_2 har n Sylow p-undergrupper, der $n|(pq)$ og $n \equiv 1 \mod p$. Den første betingelsen gir $n \in \{1, q, p, pq\}$; den andre betingelsen gir $n = 1$. Denne ene Sylow p-undergruppen er da normal.

august 2010: 3

a) Siden $|D_{12}| = 12$, vet vi at en Sylow 3-undergruppe av D_{12} har orden 3. En undergruppe av orden 3 er $H = \{\rho_0, \rho_2, \rho_4\}$. Siden denne gruppen er normal ($N[H] = D_{12}$), og alle Sylow 3-undergrupper er konjugerte av hverandre, må dette være den eneste Sylow 3-undergruppen.

D_{12} har altså én Sylow 3-undergruppe.

b) $\delta_1\mu_{2,3} = \mu_{3,4} = \mu_{2,3}\delta_1$. Dermed ser vi at H er lukket under gruppeoperasjonen in D_{12}, inneholder identitetselement samt inverser av sine elementer. Da er H en undergruppe av D_{12}.

c) Vi observerer at $\rho_1\delta_1\rho_1^{-1} = \delta_2 \notin H$. Dermed er H ikke normal.

desember 2011: 3

a) $\sigma\tau = (14)(35)$.

b) σ og τ har begge orden 5.

$H_1 \neq H_2$, men det finnes flere isomorfier mellom H_1 og H_2, for eksempel ϕ gitt ved $\phi(\sigma) = \tau$.

c) Det finnes n Sylow 5-undergrupper av G, der $n \equiv 1 \mod 5$ og $n||G|$. Ved å gå igjennom divisorene til $|G| = 120$, finner vi at vi må ha $n = 1$ eller $n = 6$. Siden H_1 og H_2 er to ulike Sylow 5-undergrupper, må vi dermed ha $n = 6$.

d) Ethvert produkt av to like permutasjoner vil igjen være en like permutasjon, så $H \subseteq A_5$. Generelt vet vi at $|A_n| = \frac{S_n}{2} = \frac{n!}{2}$. Dermed er $|A_5| = 60 = |H|$, og vi må ha $H = A_5$