

# Algebraiske påskenøtter

March 22, 2013

## 1 En distré professor

En foreleser i abstrakt algebra skal gi studentene sine en liste over ni heltall som danner en gruppe under multiplikasjon modulo 91. Uheldigvis utelater hun et av sifrene, slik at mengden nå er 1, 9, 16, 22, 53, 74, 79 og 81.

Hvilket heltall har forsvunnet?

(Oppgaven skal visstnok være basert på en sann historie, men ikke ved NTNU)

## 2 En ganske stor gruppe

Hvor mange elementer i  $\mathbb{Z}_{8000000}$  har orden 8?

## 3 Litt Sylowteori

Vis at enhver gruppe av orden 105 har en normal undergruppe.

## 4 Litt mere Sylowteori

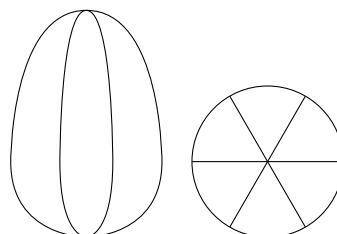
Vis at enhver gruppe av orden  $2^n \cdot 7$  (der  $n \in \mathbb{N}$ ) har en normal undergruppe. Gjelder dette for alle  $2^n \cdot p$ , der  $p$  er et primtall?

## 5 Fargelegging av påskeegg

Du skal male påskeegg, og velger å dele hvert egg inn i 6 sektorer, som på figuren til venstre.

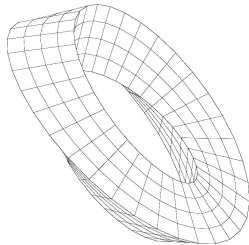
Du har tre farger til rådighet, men vil ikke bruke samme farge på to sektorer som ligger inntil hverandre. Hvor mange ulike egg kan du male, når to egg regnes som like dersom det ene kan roteres til det andre?

Det vanker en premie om noen kommer med et fullt sett med malte egg etter påske!



Egget sett fra siden og ovenfra

## 6 Fargelegging av krans



Du har et tau med et tverrsnitt som et regulært polygon med  $n$  hjørner. Du retter ut tauet, vrir den ene enden  $\frac{k}{n}$  ganger rundt, og limer sammen endene (figuren viser hva du ender opp med når  $n = 3$  og  $k = 1$ )

Når limet har tørket, tar du frem malerskrinet, begynner å male en flate og fortsetter langs denne flaten, rundt og rundt på tauet, til du kommer til et sted som allerede er malt. Du velger så en ny farge og en umalt flate, og maler rundt til du kommer til et allerede malt sted. Du fortsetter til hele tauet er malt. Hvor mange farger trenger du?

## 7 Fyrstikkoppgave

Hvordan kan du danne fire kvadrater med seks fyrstikker?

Hvis du synes denne oppgaven er litt lite algebraisk: Hvis du har  $k$  farger, og maler fyrstikkene (en fyrstikk blir bare malt med en farge en farge), på hvor mange ulike måter kan du male figuren du laget, opp til rotasjon?

## 8 Gambleren

På et kasino<sup>1</sup> ser du på en gammel, stygg man som spiller på svart eller rødt rulettbordet og taper gang på gang på gang. Du spør vennen din hvordan det er mulig å ha slik uflaks, og han forteller:

-Vel, jeg har hørt at han er rammet av en forbannelse som gjør at han taper omkring 90% av tida.

-Hvorfor fortsetter han da å spille? Blir han ikke ruinert?" spør du, forvirret.

-Det er kona hans som forsørger ham. Den vakre kvinnen på hans høyre side.

-Blir hun ikke lei? Hvorfor går hun ikke fra ham?

-Nei, hun virker ganske fornøyd med det hele.

Hvordan kan dette ha seg?

---

<sup>1</sup>også kjent som et institutt for anvendt statistikk.