Algebraiske påskenøtter - Løsningsforslag

April 15, 2013

1 En distré professor

Ved å prøve oss frem finner vi at $9 \cdot 74 \equiv 29 \mod 91$; det utelatte elementet er altså 29.

2 En ganske stor gruppe

For at et element x skal ha orden 8, så må $8x \equiv 0 \mod 8 \cdot 10^6$. Dermed må vi ha at $10^6|x$; vi har at $x = y \cdot 10^6$, der y har orden 8 i $\mathbb{Z}_8$. Dermed må $y \in \{1, 3, 5, 7\}$, og følgelig er $x \in \{10^6, 3 \cdot 10^6, 5 \cdot 10^6, 7 \cdot 10^6\}$.

3 Litt Sylowteori

$|G| = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Vi har enten 1 eller 15 Sylow 7-undergrupper av G. I førstnevnte tilfelle er denne ene undergruppen normal, og vi er i mål. Ellers observerer vi at vi trenger at $15(7-1) = 90$ distinkte elementer av G har orden 7.

Vi har enten 1 eller 21 Sylow 5-undergrupper av G. I førstnevnte tilfelle er denne ene undergruppen normal, og vi er i mål. Ellers observerer vi at vi trenger at $21(5-1) = 84$ distinkte elementer av G har orden 5.

Til slutt ser vi at vi ikke kan ha både 15 Sylow 7-undergrupper og 21 Sylow -undergrupper, da vi i så fall vil trenge $90 + 84 = 174$ distinkte elementer, men G har orden 105. Dermed vil enhver gruppe av orden 105 ha en normal undergruppe.

4 Litt mere Sylowteori

(oppgaven utgikk)

5 Fargelegging av påskeegg

Første steg i oppgaven er å finne ut hvor mange mulige fargelegginger som finnes før rotasjoner tas med i betraktningen. Her kan man bruke algebraisk grafteori, eller man kan gjøre som øvingslærer, og telle opp. Velg et punkt på egget og en retning, kall den første fargen du bruker a, neste farge b og tredje farge c. Da får du følgende mulige fargelegginger:

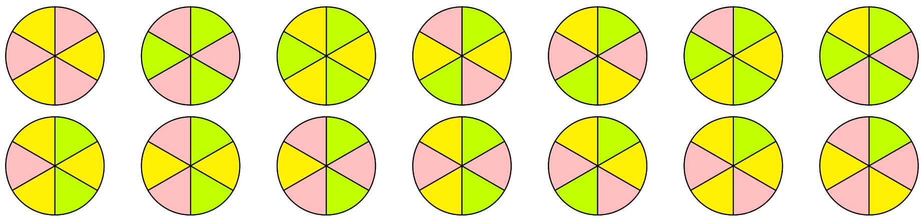
ababab	ababac	ababcb	abacab
abacac	abacbc	abcabc	abcacb
abcbab	abcbac	abcbcb	

Dette skulle bli elleve konfigurasjoner, og med seks mulige måter å velge farge a, b og c på bør det bli 66 mulige fargelegginger før vi tar hensyn til rotasjonene.

Vi benevner rotasjonene $\rho_0 \dots \rho_5$ slik vi er vant til og teller opp hvor mange fargelegginger som forblir invariante:

rotasjon	beskrivelse av invariante fargelegginger	antall
ρ_0	alle	66
ρ_1	ingen	0
ρ_2	ababab	6
ρ_3	abcabc	6
ρ_4	ababab	6
ρ_5	ingen	0

Med Burnsides formel får vi da at det finnes $\frac{1}{6}(66+6+6+6) = 14$ ulike fargelegginger, som vist under.



6 Fargelegging av krans

Tenk på tauet som $\mathbb{Z}_n$; å rotere k ganger blir å lage faktorgruppen $\mathbb{Z}_n/\langle k \rangle$, og antall farger du trenger er $|\mathbb{Z}_n/\langle k \rangle| = \gcd(n,k)$.

7 Fyrstikkoppgave

Som nevnt på siden til faget skal det stå likevinklede trekanter, ikke kvadrater i denne oppgaven. Da kan man få det til ved å lage en pyramide med en trekant som grunnflate.

Hvis vi kaller hjørnene 1, 2, 3 og 4 finner vi at gruppen av symmetrier er:

$$G = \{(1),(1,2,3),(1,3,2),(1,2,4),(1,4,2),(1,3,4),(1,4,3),(2,3,4),\\ (2,4,3),(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$$

Med n farger og seks flater som skal fargelegges er det i utgangspunktet n^6 mulige fargelegginger. Samtlige er invariante under identitetsrotasjonen. Under symmetriene av typen (a, b, c) vil det finnes n^2 fargelegginger som forblir invariante. Under symmetriene av typen $(a, b)(c, d)$ er det n^4 fargelegginger som forblir invariante.

Med Burnsides formel får vi da at det finnes $\frac{n^6+3n^4+8n^4}{12}$ ulike fargelegginger.

8 Gambleren

Hver gang mannen vedder, vedder kona på det motsatte, men betydelig mer enn hva han vedder. Da hun vinner nesten 90% av tida (ruletthjulet har en eller to grønne felter der begge vil tape), tjener hun lett inn det han taper.