Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Aslak Bakke Buan 73 55 02 89/40 84 04 68

Eksamen i MA2201/TMA4150: Algebra og tallteori

Bokmål
18. mai 2013
Tid: 0900-1300

Tillatte hjelpemidler:
enkel kalkulator

Alle svar må begrunnes og forklares.

Oppgave 1

a) Finn alle abelske grupper med ~~20~~ 16 elementer, opp til isomorfi.

b) La G vï¿½re gruppen av enheter (inverterbare elementer) i den kommutative ringen $R = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_5$, der gruppeoperasjonen i G er multiplikasjon i R. Hvilken av gruppene i a) er isomorf med G?

Oppgave 2

La G vï¿½re en gruppe med identitetselement e, og la $n \geq 2$ vï¿½re et heltall. La $H_n = \{x \in G \mid x^n = e\}$.

a) Vis at H_n er en undergruppe av G, nï¿½r G er abelsk.

b) Vis at H_n ikke alltid er en undergruppe av G.

Oppgave 3

La $S = M_3(\mathbb{Z}_3)$ vï¿½re ringen av 3×3-matriser med elementer i kroppen $\mathbb{Z}_3$, og la R vï¿½re delmengden

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

a) Vis at R er en kommutativ underring av S med identitetselement.

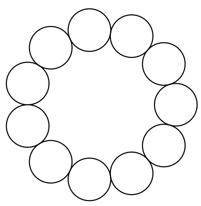
b) La $\phi\colon R \to \mathbb{Z}_3$ vï¿½re funksjonen gitt ved

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \right) = x.$$

Vis at ϕ er en ringhomomofi. Finn $\operatorname{Ker}\phi$ (dvs kjernen til ϕ), og forklar hvorfor faktorringen $R/\operatorname{Ker}\phi$ er en kropp med 3 elementer.

Oppgave 4

Du skal lage et perlekjede av 11 perler, som vist i figur 1. Du har 5 like svarte perler og 6 like hvite perler. Hvor mange forskjellige perlekjeder kan du da lage?



Figur 1: Perlekjede med 11 perler.

Oppgave 5

a) (i) Hva betyr det at en gruppe er simpel?

(ii) La G vï¿½re en endelig gruppe, og la p vï¿½re et primtall som deler ordenen til G (dvs $p \big| |G|$). Formuler Sylows tredje teorem (om antallet av Sylow p-undergrupper av G).

b) Vis at ingen gruppe av orden 105 er simpel.

Oppgave 6

Finn/konstruer en kropp med 125 elementer.