Oppgave 1:

a) Ved klassifikasjonen for endelige abelske grupper:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$$

$$\mathbb{Z}_{16}$$

b) $\mathbb{Z}_{12}$ har enheter $\{1,5,7,11\}$, alle har orden ≤ 2

siden $5^2 = 7^2 = 11^2 = 1$

dermed gruppa av enheter: $\mathbb{Z}_{12}$ er isomorf med $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_5$ har enheter $\{1,2,3,4\}$

gruppa av enheter i $\mathbb{Z}_5$ er syklisk av orden 4, så isomorf med $\mathbb{Z}_4$

Dermed: $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

Oppgave 2

$H_n = \{x \in G \mid x^n = e\} \subseteq G$, G har id.elem. e.

a) Må vise
1) $x, y \in H_n \Rightarrow xy \in H_n$
2) $e \in H_n$
3) $x \in H_n \Rightarrow x^{-1} \in H_n$

1) $x^n = e$, $y^n = e \Rightarrow (xy)^n = x^n y^n = e \cdot e = e \Rightarrow xy \in H_n$

siden abelsk

2) $e^n = e$ så $e \in H_n$

3) $x \cdot x^{-1} = e$

$$\Downarrow$$

$$(x \cdot x^{-1})^n = e^n = e$$

$$\Downarrow$$

$$x^n \cdot (x^{-1})^n = e$$

$$\Downarrow$$

$$e \cdot (x^{-1})^n = e$$

$$\Downarrow$$

$(x^{-1})^n = e$, dvs $x^{-1} \in H_n$

b) La $G = S_3$

$$H_2 = \{(1,2), (1,3), (2,3), e\}$$

$(1,3)(1,2) = (1,2,3) \notin H_2$, så H_2 er ikke undergruppe av $G = S_3$.

Oppg. 3

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{Z}_3 \right\} \subseteq S$$

a) Må sjekke: $a, b \in R \Rightarrow ab \in R$ og $a - b \in R$ for å vise at R er underring

må sjekke: $ab = ba$ for å vise at R er kommutativ

må sjekke at $1_S \in R$ for å vise at R har id. element.

La $a = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} r & s & t \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$

$$ab = \begin{bmatrix} xr & xs+yr & xt+zr \\ 0 & xr & 0 \\ 0 & 0 & xr \end{bmatrix}$$, som er i R

$$a-b=\begin{bmatrix} x-r & y-s & z-t \\ 0 & x-r & 0 \\ 0 & 0 & x-r \end{bmatrix}$$, som er i R

$$ba=\begin{bmatrix} rx & ry+sx & rz+tx \\ 0 & rx & 0 \\ 0 & 0 & rx \end{bmatrix}$$, som er lik ab,

(siden $\mathbb{Z}_3$ er kommutativ følger $ry+sx=xs+yr$
$rz+tx=xt+zr$
og $rx=xr$)

$$1_s=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ er i R.

b) $\phi: R \to \mathbb{Z}_3$ ved

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\right)=x$$

må vise $\phi(a+b)=\phi(a)+\phi(b)$ $(*)$

og $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$ $(**)$

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} r & s & t \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}\right)=\phi\left(\begin{bmatrix} x+r & y+s & z+t \\ 0 & x+r & 0 \\ 0 & 0 & x+r \end{bmatrix}\right)=x+r$$

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\right)+\phi\left(\begin{bmatrix} r & s & t \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}\right)=x+r$$, så $(*)$ holder.

$(**)$ sjekkes tilsvarende . . . . .

Altså er ϕ en ringhomomorfi.

Ved fundamentalteoremet

$$R/\ker\phi \simeq \operatorname{Im}\phi$$

der $\ker\phi = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; y,z \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ er et ideal.

og $\operatorname{Im}\phi = \mathbb{Z}_3$ siden ϕ opplagt er surjektiv.

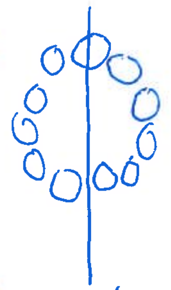
Altså $R/\ker\phi \simeq \mathbb{Z}_3$ og $\mathbb{Z}_3$ er en kropp med 3 elementer

Oppg. 4

Antall perlekjeder A er gitt ved Burnsides formel

$$A = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

der G er symmetrigruppa D_{11} (11 rotasjoner inkl. identiteten
11 refleksjoner



hver holder én perle i ro

$|X_e| = \binom{11}{6}$ $\quad |X_\sigma| = 0$ for σ rotasjon ulik e

$|X_\mu| = \binom{5}{3}$ må holde svart perle i ro

og ha 2 svarte og 3 hvite på hver side

disse kan fordeles på $\binom{5}{3}$ måter, f.eks:

Får dermed

$A = \frac{1}{22}\left(\binom{11}{6} + 11 \cdot \binom{5}{3}\right) = \underline{26}$ mulige perlekjeder

Oppg. 5 a) se boka

Oppg 5 b) se løsningsforslag påskenøtter

Oppg. 6

Må finne irredusibelt polynom i $\mathbb{Z}_5[x]$ av grad 3.

$f(x) = x^3 + x + 1$ er irredusibelt, siden

$f(t) \neq 0$ for $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\left(f(1) = 3 \quad f(2) = f(3) = 1 \quad f(4) = 4 \quad f(0) = 1 \right)$

Dermed er $I = (x^3 + x + 1)$ et maksimalt ideal i $\mathbb{Z}_5[x]$,

og $\mathbb{Z}_5[x]/I$ er en kropp med $\underset{\underset{125}{\shortparallel}}{5^3}$ elementer