



### Seksjon 23

- 7 Fra Korollar 6.16 vet vi at hvis vi har funnet én generator, kan vi også regne ut resten av generatorene. Merk at  $|\mathbb{Z}_{17}^*| = 16$ , slik at alle elementer vil ha en orden som er en potens av 2.

Vi starter med å finne en generator.  $2^8 \equiv 1 \pmod{17}$ , så 2 er ikke en generator av gruppa. Derimot har vi at  $3^8 \equiv 16 \pmod{17}$ , slik at 3 er en generator av gruppa.

Gitt en generator  $a$ , er alle andre generatorer gitt som  $a^r$ , der  $r$  er relativt prim til ordenen til gruppa. I dette tilfellet vil det si at  $r$  er et oddetall. Dermed er generatorene (jeg sløyfer fra nå av modulo-notasjon)  $3^1 = 3$ ,  $3^3 = 10$ ,  $3^5 = 5$ ,  $3^7 = 11$ ,  $3^9 = 14$ ,  $3^{11} = 7$ ,  $3^{13} = 12$  og  $3^{15} = 6$ .

- 9 Fra korollar 23.3 vet vi at  $(x - a)$  er en lineær faktor av  $x^4 + 4$  hvis og bare hvis  $a$  er en rot av polynomet, det vil si  $a^4 + 4 = 0$ . Vi merker oss at 1, 2, 3 og 4 alle er røtter av polynomet. Dermed er  $x^4 + 4 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ .

- 35 Vi har  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ . Siden  $a$  er en rot av  $f(x)$  har vi at

$$f(a) = a_0 + a_1a + \dots + a_{n-1}a^{n-1} + a_na^n = 0$$

Siden  $F$  er en kropp og  $a \neq 0$  har  $a$  en invers  $\frac{1}{a}$ . Vi ganger likningen over med  $(\frac{1}{a})^n$  og får at

$$a_0 \left(\frac{1}{a}\right)^n + a_1a \left(\frac{1}{a}\right)^n + \dots + a_{n-1}a^{n-1} \left(\frac{1}{a}\right)^n + a_na^n \left(\frac{1}{a}\right)^n = 0.$$

Vi forkorter og får

$$a_0 \left(\frac{1}{a}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{1}{a}\right) + a_n = 0.$$

Dermed har vi at  $(\frac{1}{a})^n$  er en rot av  $a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1} + a_0x^n$ .

### Seksjon 26

- 3 Et ideal i en ring må være en additiv undergruppe av ringen. Dermed ser vi på alle additive undergrupper  $N$  av  $\mathbb{Z}_{12}$ . Vi sjekker først om  $N$  er lukket under multiplikasjon med alle elementer fra  $\mathbb{Z}_{12}$ , og regner så ut  $\mathbb{Z}_{12}/N$

N	Ideal?	$\mathbb{Z}_{12}/N$
$\langle 0 \rangle$	Ja	$\mathbb{Z}_{12}$
$\langle 1 \rangle$	Ja	$\{0\}$
$\langle 2 \rangle$	Ja	$\mathbb{Z}_2$
$\langle 3 \rangle$	Ja	$\mathbb{Z}_3$
$\langle 4 \rangle$	Ja	$\mathbb{Z}_4$
$\langle 6 \rangle$	Ja	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

- 17  $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$ , åpenbart. Vi kan vise at denne mengden er lukket under addisjon og multiplikasjon; dermed er det en underring.

Tilsvarende ser vi at  $R' = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z})$ . Igjen kan vi vise at mengden er lukket under addisjon og multiplikasjon, og dermed er en underring.

Å vise at  $\phi : R \rightarrow R'$  respekterer addisjon er relativt enkelt, så vi holder oss her til å vise at den respekterer multiplikasjon:

$$\begin{aligned} \phi((a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})) &= \phi((ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}) \\ &= \begin{pmatrix} ac + 2bd & 2(ad + bc) \\ ad + bc & ac + 2bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 2d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \phi(a + b\sqrt{2})\phi(c + d\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$\phi$  er altså en ringhomomorfi, og den er åpenbart 1-1 også.

- 22 a)  $\phi(N)$  er en underring; jamfør teorem 26.3. La nå  $r \in R$  og  $n \in N$ :

$$\begin{aligned} \phi(r)\phi(n) &= \phi(rn) \in \phi[N] \\ \phi(n)\phi(r) &= \phi(nr) \in \phi[N] \end{aligned}$$

(vi har her brukt at  $N$  er et ideal). Det følger at  $\phi[N]$  er et ideal i  $\phi[R]$ .

- b) Se på injeksjonen  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ , gitt ved  $\phi(n) = n$ .  $2\mathbb{Z}$  er et ideal i  $\mathbb{Z}$ , men ikke i  $\mathbb{Q}$ .

- c) Fra teorem 26.3 vet vi at  $\phi^{-1}[N']$  er en underring. La nå  $r \in R$ .

$$\begin{aligned} \phi(\phi^{-1}[N']r) &= N'\phi(r) = N' \Rightarrow \phi^{-1}[N']r = \phi^{-1}[N'] \\ \phi(r\phi^{-1}[N']) &= \phi(r)N' = N' \Rightarrow r\phi^{-1}[N'] = \phi^{-1}[N'] \end{aligned}$$

Følgelig er  $\phi^{-1}[N']$  et ideal.

- 30 Vi skal altså sjekke om mengden av nilpotente elementer er et ideal. Vi sjekker derfor definisjonen steg for steg:

**Additiv undergruppe** Her sjekker vi gruppeaksiomene:

**Lukket under addisjon** La  $a$  og  $b$  være to nilpotente elementer, si at  $a^n = 0$  og  $b^m = 0$ . Da er  $(a + b)^{m+n} = 0$ , se øving 9, oppgave 18.46. Dermed er mengden lukket under addisjon.

**Identitetselement** 0 er nilpotent

**Inverser** Anta at  $a$  er nilpotent med  $a^n = 0$ . Vi ser at  $(-a)^n = ((-1)(a))^n = (-1)^n a^n = 0$ ; her har vi brukt at ringen er kommutativ.

**Lukket under multiplikasjon med vilkårlig ringelement:** Anta at  $a$  er nilpotent med  $a^n = 0$ , la  $b$  være et vilkårlig element i  $R$ .  $(ab)^n = a^n b^n = 0$ . Merk at det første likhetstegnet kun stemmer for en kommutativ ring!

31 Vi oppsummerer resultatene:

Ring	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_{32}$
Nilideal	$\{0, 6\}$	$\{0\}$	$\{0, 2, 4, \dots, 30\}$

### Eksamensoppgaver

V2013 - 3 a) Her er det nok å sjekke definisjonen:  $R$  er lukket under addisjon og multiplikasjon, og multiplikasjon er kommutativt.

- b)
- For å vise  $\phi$  er en ringhomomorfi, må vi vise at  $\phi$  respekterer addisjon og multiplikasjon. Dette er ganske rett frem ved innsetting.
  - $\ker \phi = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z}_3 \right\}$
  - $R/\ker \phi \cong \phi[R] = \mathbb{Z}_3$ , i følge fundamentalteoremet for homomorfier (26.17).  $\mathbb{Z}_3$  er som kjent en kropp med tre elementer.

K2007 - 6 Vi vet at et produkt av to polynomer, henholdsvis av grad  $m$  og  $n$ , over en kropp<sup>1</sup> er et polynom av grad  $m + n$ . Ut ifra det ser vi at enhetene i  $\mathbb{Z}_5[x]$  er alle konstante polynomer unntatt 0.

Videre ser vi at  $\mathbb{Z}_5[x]$  er et integritetsområde (ingen nulldivisorer), men ikke en kropp (alle polynomer av grad større en null mangler inverser).

V2007 - 4 a) La  $I \subseteq R$  være et ideal i en kommutativ ring, og anta at  $a \in I$  er en enhet. Da har vi at  $1 = a^{-1}a \in a^{-1}I = I$ , og dermed har vi at for enhver  $r \in R$ , så er  $r = r1 \in rI = I$ , så  $R = I$ .

b) Kjernen til  $\phi$  er et ideal i  $K$ .

Dersom  $\ker \phi = \{0\}$  er  $\phi$  1-1, og vi er i mål.

Dersom  $\ker \phi \neq \{0\}$ , så finnes det et ikke-null element  $a \in \ker \phi$ . Da  $K$  er en kropp må  $a$  være en enhet. Dermed har vi fra (a) at  $\ker \phi = K$ , så  $\phi$  er nullavbildningen.

<sup>1</sup>Strengt tatt er det nok med et integritetsområde

V2007 - 5

$$\begin{aligned}
 R &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z}_2 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.
 \end{aligned}$$

Nulldivisorene er

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Enhetene er

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dette er ikke en divisjonsring, da det finnes ikke-null elementer som ikke enheter.

H2006 - 7 Vi har  $p$  et primtall og  $0 \leq a < p$  et heltall. Videre lar vi  $q(x) \in \mathbb{Z}_p(x)$  være gitt ved  $q(x) = x^p - a$ . Fermats lille teorem forteller oss at  $a^p \equiv a \pmod{p}$ . Dermed er  $a$  en rot av  $q$ , og siden  $\mathbb{Z}_p$  er en kropp må da  $(x - a)$  være en (lineær) faktor av  $q(x)$ .