Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Oppgavene merket * er litt mer utfordrende.

Fra boka:
Seksjon 27: 5, 6, 9, 31, 34, 35

Andre oppgaver:

$\boxed{1}$ Vis at hvis $I \subseteq \mathbb{Z}$ er et ideal så finnes det et element $n \in \mathbb{Z}$ med $n \geq 0$ slik at

$$I = n\mathbb{Z} = \{nq | q \in \mathbb{Z}\}$$

Hint: Divisjonsalgoritmen for $\mathbb{Z}$.

$\boxed{2}$ Vis at for et ideal $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ gjelder:

$$n\mathbb{Z} \text{ maksimalt ideal} \Leftrightarrow n \text{ primtall.}$$

$\boxed{3}$ La F være en kropp. Vis at hvis $I \subseteq F[x]$ er et ideal så finnes et element $f(x) \in F[x]$ slik at

$$I = \langle f(x) \rangle = \{f(x)g(x) | g(x) \in F[x]\}$$

Hint: Divisjonsalgoritmen for $F[x]$.

$\boxed{4}$ La F være en kropp og la $f(x) \in F[x]$. Vis at

$$\langle f(x) \rangle \text{ maksimalt ideal} \Leftrightarrow f(x) \text{ irredusibelt.}$$

Hint for "$\Leftarrow$": Anta at J er et ideal slik at $\langle f(x) \rangle \subseteq J \subseteq F[x]$. I følge oppgave (3) er da $J = \langle p(x) \rangle$ for et element $p(x) \in F[x]$. Dersom $\deg p = 0$ er $p(x) = a$ for en konstant a. Vis at $a \neq 0$, og at vi da har $J = F[x]$. Dersom $\deg p \geq 1$, bruk divisjonsalgoritmen for $F[x]$: $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$...

Eksamensoppgaver:
Vår 2011: oppgave 3
Høst 2010: oppgave 3
Vår 2009: oppgave 4
Vår 2008: oppgave 5