



## Seksjon 8

9 La  $\iota$  være identitets-elementet i  $S_6$ . Vi ser at

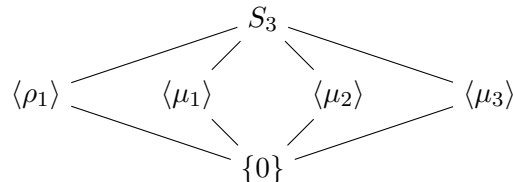
$$\mu^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \iota.$$

Det følger at

$$\mu^{100} = (\mu^2)^{50} = \iota^{50} = \iota$$

18 a)  $\langle \rho_1 \rangle = \{\rho_1, \rho_2, \rho_0\} = \langle \rho_2 \rangle$ .  $\langle \mu_1 \rangle = \{\mu_1, \rho_0\}$ .

b) Vi ser at  $\langle \mu_2 \rangle = \{\mu_2, \rho_0\}$ ,  $\langle \mu_3 \rangle = \{\mu_3, \rho_0\}$  og  $\langle \rho_0 \rangle$ . Legg merke til at hvis  $\rho_1$  eller  $\rho_2$  og  $\mu_i$ , der  $i = 1, 2, 3$  er i én undergruppe, så vil denne undergruppen være uekte. Det samme gjelder dersom  $\mu_i$  og  $\mu_j$ , der  $i, j = 1, 2, 3$  og  $i \neq j$ . Det følger at vi har funnet alle undergrupper, og undergruppediagrammet ser ut som følger:



40 Jeg la merke til at en del slet med å komme i gang på denne oppgaven. Matematikken i oppgaven er egentlig ikke veldig vanskelig, men man må holde tunga rett i munnen for å sortere ut notasjon og begreper. Legg merke til at når du først har funnet ut hva du skal vise, er alt du trenger å gjøre å bruke noen aksiomer. Dette er egentlig typisk for dette faget: *aksiomene er svært viktige!*

I denne oppgaven er  $A$  en mengde,  $b \in B \subseteq A$  og  $S_A$  er permutasjonsgruppen på  $A$ . Vi studerer undermengden  $H_b \subseteq S_A$  gitt ved  $H = \{\sigma \in S_A \mid \sigma(b) = b\}$ .  $H_b$  er en undergruppe av  $S_A$  dersom den oppfyller aksiomene for undermengder:

Lukket under gruppeoperasjon: La  $\sigma, \tau \in H_b$ . Da har vi at

$$(\sigma\tau)(b) = \sigma(\tau(b)) = \sigma(b) = b.$$

Altså er  $\sigma\tau \in H_b$ .

Inneholder identiteten: Identitetspermutasjonen sender  $b$  til  $b$  og er dermed i  $H_b$ .

Inneholder inverser: La  $\sigma \in H_b$ .  $\sigma^{-1}(b) = \sigma^{-1}(\sigma(b)) = b$ , så  $\sigma^{-1} \in H_b$

Dermed er  $H_b$  en undermengde av  $S_A$

46  $S_n$  er som kjent permutasjonen av permutasjoner på settet  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ . La  $\sigma$  være permutasjonen som bytter om på 1 og 2, og lar resten stå urørt, mens  $\tau$  bytter om på 2 og 3, og lar resten stå urørt. Da har vi at  $\sigma\tau(2) = 3$ , mens  $\tau\sigma(2) = 1$ . Det følger at  $S_n$  ikke er abelsk for  $n \geq 3$ .

51b Her er det to hovedmåter å gå frem på.

Det ene er å finne en isomorfi mellom  $G$  og  $G'$  som binærstrukturer (siden  $G$  er en gruppe må da også  $G'$  være en gruppe). En isomorfi som fungerer er  $x \mapsto x^{-1}$

En enklere måte (etter min mening) er å sjekke at  $G'$  oppfyller gruppeaksiomene.

**Assosiativ:** La  $x, y, z \in G'$ . Da har vi

$$(x *' y) *' z = z * (x *' y) = z * (y * x) = (z * y) * x = x *' (z * y) = x *' (y *' z)$$

**Identitet:** Identitets-elementet i  $G$  er også identitets-elementet i  $G'$ .

**Inverser:** Inversen  $x \in G'$  er den samme som inversen til  $x$  i  $G$ .

## Seksjon 9

29 Vi har at  $H \trianglelefteq S_n$ . La  $|H| = m$ , og anta at  $H$  inneholder  $x$  odde elementer.

Dersom  $x = 0$  inneholder  $H$  kun like elementer, og vi er i mål.

Dersom  $x \neq 0$  kan vi navngi de  $x$  odde elementene i  $H$ : kall de  $a_1, \dots, a_x$ ; og vi kan navngi de  $m - x$  like elementene i  $H$  som  $b_1, \dots, b_{m-x}$ . Merk at siden identitetspermutasjonen er like, vil det alltid finnes minst ett like element.

Når vi ganger sammen to odde elementer, får vi ett like element. Dermed har vi at  $a_1 a_1, \dots, a_1 a_x$  er parvis ulike (non-equal) elementer som alle er like (even). Det følger at  $x \leq m - x$ .

Når vi ganger sammen ett odde og ett like element, får vi ett odde element. Dermed har vi at  $a_1 b_1, \dots, a_1 b_{m-x}$  er parvis ulike elementer som alle er odde. Det følger at  $x \geq m - x$ .

Følgelig er  $x = m - x$ , og dermed er  $m = 2x$ , så akkurat halvparten av elementene i  $H$  er odde, og halvparten like.

## Eksamensoppgave

V2012-2 a)

$$\sigma_1 = (1, 2, 3)(2, 3, 4) = (1, 2)(3, 4)$$

$$\sigma_2 = (1, 5)(1, 4)(1, 3)(1, 2) = (1, 2, 3, 4, 5)$$

- b) Som produkt av disjunkte sykler kan vi skrive  $\sigma = (1, 3, 5, 7, 8)(2, 4, 6)$ . Ordenen til en permutasjon skrevet som disjunkte sykler er *minste felles multiplum* av lengden på syklene (oppgave 9.13 tar deg igjennom beviset).  $\sigma$  har altså orden 15.

Vi ser ved hjelp av kommentaren under definisjon 9.11 at vi kan skrive  $\sigma = (1, 8)(1, 7)(1, 5)(1, 3)(2, 6)(2, 4)$ . Det følger at  $\sigma$  er en like permutasjon.

- c) Vi vet at ordenen til en permutasjon  $\sigma \in S_n$ , skrevet som et produkt av disjunkte sykler  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_m$  er  $\text{lcm}(|\sigma_1|, \dots, |\sigma_m|)$ . Dermed finner vi:

n	optimal oppdeling av sykler	skranke for ordenen
2	(1,2)	2
3	(1,2,3)	3
4	(1,2,3,4)	4
5	(1,2)(3,4,5)	6
6	(1,2,3,4,5,6)	6
7	(1,2,3,4)(5,6,7)	12
8	(1,2,3,4,5)(6,7,8)	15

### Ekstra

- 1 La  $G$  og  $G'$  være grupper,  $\phi : G \rightarrow G'$  en 1-1 avbilding slik at  $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ . Vi ønsker å vise at  $\phi[G]$  er en undergruppe av  $G'$  så vi sjekker undergruppeaksiomene:

Lukket under gruppeoperasjon: La  $\phi(x)$  og  $\phi(y)$  være vilkårlige elementer i  $\phi[G]$ . Da er  $\phi(x)\phi(y) = \phi(xy) \in \phi[G]$ , siden  $xy \in G$

Inneholder identiteten: La  $e$  være identiteten i  $G$  og  $e'$  være identiteten i  $G'$ . Da er

$$e'\phi(e) = \phi(e) = \phi(ee) = \phi(e)\phi(e)$$

siden  $G'$  er en gruppe holder kanselleringslovene, og  $e' = \phi(e) \in \phi[G]$ .

Inneholder inverser: Siden

$$\phi(x)^{-1}\phi(x) = e' = \phi(e) = \phi(x^{-1}x) = \phi(x)\phi(x^{-1}),$$

så ser vi at  $\phi(x)^{-1} = \phi(x^{-1}) \in \phi[G]$ .

- 2 Se bokas kapittel 8.

- 3  $A_3 = \{(1), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$