Løsningsforslag — Øving 7

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Seksjon 16

2 Fasit:

$$
\begin{array}{ll}
G_1 = \{\rho_0, \delta_2\} = G_3 = G_{P_1} = G_{P_3} & G_2 = \{\rho_0, \delta_1\} = G_4 = G_{P_2} = G_{P_4} \\
G_{S_1} = \{\rho_0, \mu_1\} = G_{S_3} & G_{S_2} = \{\rho_0, \mu_2\} = G_{S_4} \\
G_{m_1} = \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\} = G_{m_2} & G_{d_1} = \{\rho_0, \rho_2, \delta_1, \delta_2\} = G_{d_2} \\
G_C = G &
\end{array}
$$

11 La G være en gruppe og la X være en G-mengde. Vi skal vise at

"G har en trofast virkning på X"$\Leftrightarrow$"Alle elementer i G virker forskjellig på X".

Vi viser denne ekvivalensen ved å vise begge implikasjoner.

"$\Rightarrow$"Anta at G virker trofast på X og anta at $g, h \in G$ er slik at $gx = hx$ for alle $x \in X$.
Da er $(g^{-1}h)(x) = g^{-1}(h(x)) = g^{-1}(g(x)) = x$ for alle $x \in X$. Dermed må $gh^{-1} = e$, så $g = h$.
"$\Leftarrow$"Anta at G ikke virker trofast på X; da finnes det et element $g \in G$, $g \neq e$ slik at $gx = x$ for alle $x \in X$. Da er $gx = ex$ for alle $x \in X$.

13 Vi lar $G = (\mathbb{R}, +)$, $X = \mathbb{R}^2$, og definerer virkningen av et element $\theta \in G$ på $(x, y) \in X$ ved

$$\theta(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, y \cos\theta + x \sin\theta)$$

a) For å se at dette er en gruppevikning, sjekker vi aksiomene i definisjon 16.1:

1. $0(x, y) = (x, y)$ (Fåes ved innsetting)
2. $(\theta + \phi)(x, y) = \theta(\phi(x, y))$. Dette kan vi bekrefte ved å betrakte virkningen geometrisk; å rotere et punkt $\theta + \phi$ radianer om origo, er det samme som først å rotere det ϕ radianer og så θ radianer. Eventuelt kan man regne det hele ut med trigonometriske identiteter.

b) Vi setter punktet $P = (x_P, y_P)$.

$$\begin{aligned} GP &= \{\theta(P) | \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_P \cos\theta - y_P \sin\theta, y_P \cos\theta + x_P \sin\theta) | \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid |Q| = |P|\}. \end{aligned}$$

GP er altså sirkelen med radius $|P|$.

$$G_P = \{\theta \in \mathbb{R} | \theta(P) = P\} = \{n2\pi | n \in \mathbb{Z}\}$$

Seksjon 17

$\boxed{1}$ Vi har lyst til å bruke Burnside's formel:

$$(\text{Antall baner i } X \text{ under } G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} X_g,$$

så vi begynner med å finne de ulike leddene i formelen.

$$\begin{aligned} G &= \langle (1,3,5,6) \rangle = \{(1,3,5,6), (1,5)(3,6), (1,6,5,3), (1)\} \\ |G| &= 4 \\ |X_g| &= \begin{cases} 8 & g = (1) \qquad \text{Alle elementer blir holdt stille} \\ 4 & g \neq (1) \qquad \text{2,4,7,8 blir holdt stille} \end{cases} \end{aligned}$$

Vi setter så inn i formelen:

$$(\text{Antall baner}) = \frac{1}{4}(8 + 4 + 4 + 4) = 5$$

$\boxed{4}$ Se eksempel 17.3. Svaret er 840.

$\boxed{6}$ Vi ser på en kube, og vi vet fra før at rotasjonsgruppen på kuben, G, inneholder 24 elementer.

Vi har fire farger, og skal male de åtte hjørnene på kuben. Før vi tar hensyn til at noen fargelegginger egentlig er like (hvis vi bare roterer kuben), har vi altså 4^8 fargelegginger; mengden av alle disse fargeleggingene er X.

Noen av disse fargeleggingene kan som sagt roteres over i hverandre (om vi for eksempel maler de fire hjørnene på toppen røde og de fire på bunnen blå, vil det kunne roteres over i fargeleggingen der de fire hjørnene på bunnen er røde, og de fire på toppen blå). Hvis to fargelegginger er slik, så vil de ligge i samme *bane* under virkningen av rotasjonsgruppen G på mengden av fargelegginger X. Men å telle baner kan vi, ved hjelp av Burnsides formel! Vi vet at $|G| = 24$, så nå må vi gå igjennom de ulike rotasjonene i G og telle hvor mange fargelegginger som forblir invariante under hver rotasjon (jeg anbefaler sterkt å finne en terning her!):

Rotasjon	Antall	$\lvert X_g \rvert$	Forklaring
Identitetsrotasjon	1	4^8	Alle fargelegginger er bevart
Om en akse gjennom to motstående sider, 90 eller 270 grader.	6	4^2	Hjørnene inntil hver side aksen går gjennom må ha samme farge
Om en akse gjennom to motstående sider, 180 grader.	3	4^4	To og to hjørner må ha samme farge.
Om en akse gjennom to motstående hjørner, 120 eller 240 grader.	8	4^4	De to hjørnene aksen går gjennom kan velge farge fritt. Ellers må tre og tre hjørner ha samme farge.
Om en akse gjennom to motstående kanter, 180 grader	6	4^4	To og to hjørner må ha samme farge.

Altså får vi at

$$\text{(antall fargelegginger)} = \frac{1}{24}(4^8 + 6 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^4 + 8 \cdot 4^4 + 6 \cdot 4^4) = 2916$$

Eksamensoppgaver

$\boxed{\text{V2011, oppgave 5}}$ **a)** $|X| = 5! = 120$

Vi ser fra aksiomene for gruppevirkning[1] at S_5 har en gruppevirkning på X. Videre ser vi at det kun finnes en bane for denne gruppevirkningen, for

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & \\ \cline{1-2}\end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \cline{1-2}\end{array}$$

b) Gitt at $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ så er også $\sigma_1\sigma_2 \in G$. I tillegg er identitetselementet i G. Dermed er G en undergruppe av S_5.

$$|G| = |\{\text{permutasjoner på } \{1,2,3\}\}| \cdot |\{\text{permutasjoner på } \{4,5\}\}| = 12.$$

Siden elementer G må ha elementer fra {1,2,3} og {4,5} i disjunkte sykler, mistenker vi at en konjugasjon med en transposisjon mellom de to settene ikke vil være i G (dette er en typisk ting du vil opparbeide deg intuisjon for etterhvert). Vi velger $(1,2) \in G$ og $(1,5) \in S_5$. Vi regner ut at

$$(1,5)(1,2)(1,5)^{-1} = (1,5)(1,2)(1,5) = (2,5) \notin G.$$

G er dermed ikke normal.

c) La $(a_1, \ldots, a_r)$ være en sykel i σ, og merk at

$$\gamma\sigma\gamma^{-1}(\gamma(a_i)) = \gamma\sigma(a_i) = \begin{cases} \gamma(a_0) & i = r \\ \gamma(a_{i+1}) & i \neq r \end{cases}$$

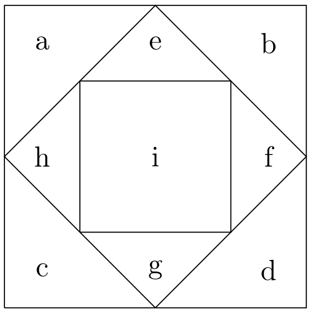
Det følger at $(\gamma(a_1), \gamma(a_2), \ldots \gamma(a_r))$ er en sykel i $\gamma\sigma\gamma^{-1}$.

[1] På eksamen bør du skrive opp disse!

Anta at $\sigma = (a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2)$ og $\sigma' = (c_1, c_2, c_3)(d_1, d_2)$. La γ være permutasjonen som sender a_i på c_i og b_i på d_i. Da er $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \sigma'$ (dette krever minimalt med utregning, se forrige del-deloppgave).

Gitt et element σ, finner vi σ^{-1} ved å snu de disjunkte syklene i σ. Følgelig har σ^{-1} samme antall sykler som σ, og disse syklene er av samme lengde som syklene til sigma. Da ser vi fra argumentet over at σ og σ^{-1} er konjugerte elementer.

V2012, oppgave 3 Vi starter med å tegne opp figuren og navngi de ulike flatene:



a) Symmetrigruppen til denne figuren er D_4, symmetrigruppen på et kvadrat. Vi vil bruke samme notasjon som boken gjør i eksempel 8.10 (og videre utover).

b) Dette er en oppgave som lukter Burnsides formel! Her er gruppen $G = D_4$, og X er mengden av alle fargelegginger av figuren. Siden figuren har ni flater som hver kan fargelegges med en av fire farger er $|X| = 4^9$. Vi regner nå ut isotropimengdene til de ulike symmetriene:

$g \in D_4$	$\lvert X_g \rvert$	forklaring
ρ_0	4^9	Alle flater kan velge farge fritt.
ρ_1	4^3	a, b, c, d må ha samme farge, e,f,g,h må ha samme farge, i velger fritt.
ρ_2	4^5	To og to motstående flater må ha samme farge, i velger fritt.
ρ_3	4^3	Som ρ_1
μ_1	4^6	a og b, c og d, f og h må ha samme farge. Resten velger fritt.
μ_2	4^6	a og c, b og d, e og g må ha samme farge. Resten velger fritt.
δ_1	4^6	b og c, e og h, f og g må ha samme farge. Resten velger fritt.
δ_2	4^6	a og d, e og f, g og h må ha samme farge. Resten velger fritt.

Fra burnsides formel får vi da at antall baner, det vil si antall distinkte farvelegginger opp til symmetri, er 34960.