Diff. likn.

16. 3. 2012

A. Invariant og attraksjonsområde

(1) $\dot{x} = f(x)$; $x, f \in \mathbb{R}^n$

Begreper:

1.) Flow: $\varphi(t; x_0)$, løsn. av (1) og $x(0) = x_0$

2.) Halvbane: $\Gamma^{\pm}_{x_0} = \{\varphi(t; x_0) : t \in [0, \pm\infty)\}$

3.) Fasebane: $\Gamma_{x_0} = \Gamma^{-}_{x_0} \cup \Gamma^{+}_{x_0}$

4.) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ invariant (positivt inv.) under (1):

$$\Gamma_{x_0} \subset \Omega \quad (\Gamma^{+}_{x_0} \subset \Omega) \text{ for alle } x_0 \in \Omega$$

5.) Attraksjonsområde for likev. pkt. x_0:

$$\Omega_a = \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \to \infty} \varphi(t; x) = x_0\}$$

÷ Eks. 1:

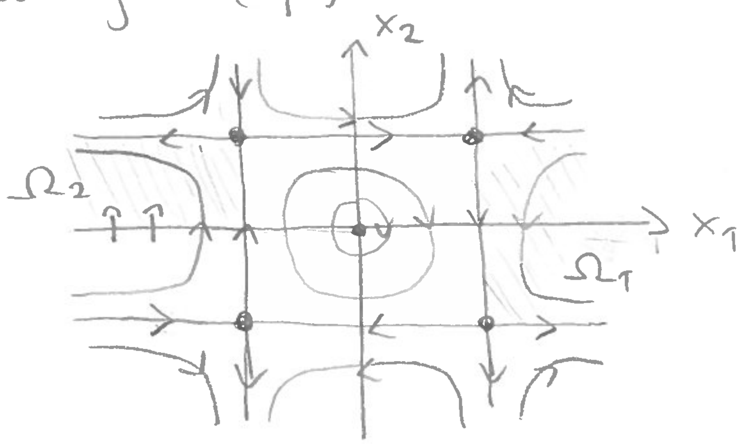
$$\dot{x}_1 = x_2(1-x_1^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1(1-x_2^2)$$

Likev. pkt. $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $(\pm 1, 0)$

Obs: fasebaner kan ikke krysse linjene

$x_1 = \pm 1$ $(x_2 = \pm 1)$ siden $\dot{x}_1 = 0$ $(\dot{x}_2 = 0)$ der

Fasediagram (s.h):



$\Omega_1 = \{(x_1,x_2) : x_1 \geq 1, x_2^2 \leq 1\}$ inv.

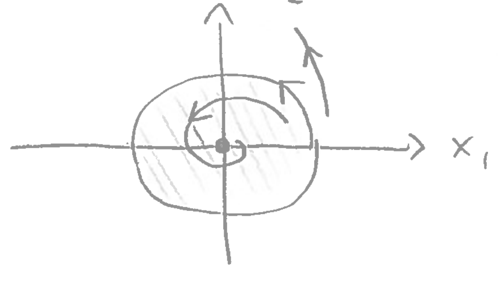
$\Omega_2 = \{(x_1,x_2) : x_1 \leq -1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ pos. inv. (ikke inv.!)

[siden $f(x_1,0) = (0,-x_1) = -x_1(0,1)$ peker inn i Ω_2]

Obs: $\mathbb{R}^2$ kan deles i 9 inv. rektangler

Eks. 2:

$$(2)\begin{cases} \dot{r} = r(r^2-1) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$



Likev. pkt. $(0,0)$, gr. sykel $r^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1$

$0 < r_0 < 1 \Rightarrow \dot{r} < 0$ og $\lim_{t \to \infty} r(t) = 0$

$r_0 \geq 1 \Rightarrow \dot{r} \geq 0$ og $r(t) \geq 1$ for $t \geq 0$.

Attraksjonsområde for $(0,0)$: $\Omega_a = \{(x_1,x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

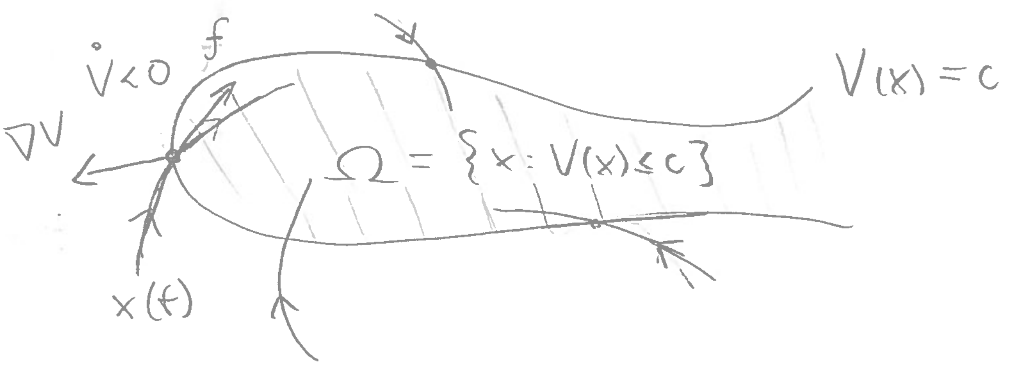
Obs. 1: Lukka fasebaner og likev. pkt. er inv.

Lem. 1: Anta $f \in C^1$. Hvis $V \in C^1$ og

$\nabla V(x) \neq 0$ og $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$

for alle x s.a. $V(x) = c \; (\in \mathbb{R})$, da er

$\Omega = \{x : V(x) \leq c\}$ pos. inv.



$\div$ "Bevis:"

a) $V(x_0) = c$, $\dot{V}(x_0) < 0 \Rightarrow V(\varphi(t; x_0)) < 0$ for $t \in (0, \varepsilon)$
ε liten nok.

b) $V(x_0) = c$, $\dot{V}(x_0) = 0$:

Anta $\varphi(t; x_0)$ forlater $V \leq c$ v. $t = 0$.

"Siden problemet er vellstilt vil det gå ikke-kryssende og kont. varierende fasebaner gj alle pkt. i $\mathbb{R}^2$.

Dermed må også løsn. som ligger nær $\varphi(t;x_0)$ forlate $V \leq c$ v. $t=0$.

Men da er $\dot{V}=0$ på $V=c$ nær x_0, og $V=c$ er del av fasebane.

Denne vil da krysse løsn. som forlater $V \leq c$

$\rightarrow$ motsigelse $\square$

<u>Cor. 1:</u> Hvis $f, V \in C^1$ og

$\nabla V(x) \neq 0$ og $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \geq 0$ for alle x s.a. $V(x)=c$

da er $\Omega = \{x : V(x) \geq c\}$ pos. inv.

[tem. 1 på $-V(x)$]

<u>Eks. 2</u> (forts)

$$(2) \overset{\text{sjk.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - (1-x_1^2-x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - (1-x_1^2-x_2^2)x_2 \end{cases}$$

$$V(x_1,x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2) \Rightarrow \dot{V} = (x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_2^2-1)$$

$x_1^2+x_2^2 \leq c^2$, $c \leq 1$ pos. inv. siden $\nabla V \neq 0$, $\dot{V}(x) \leq 0$ på $V=\frac{c^2}{2}$

—— " ——, $c \geq 1$ ———— " ———— ≥ 0 —— " ——

B. Lasalles inv. prinsipp

Tm. 1:

Anta:

i) $f(0) = 0$, f Lip. i $\Omega \ni 0$

ii) Ω pos. inv., lukka, begrenset

iii) $V(x)$ sv. L. funk. i Ω

iv) det fins ingen global løsn. $x(t)$ av (1)

s.a.

$x(t) \in \Omega \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$ og $V(x(t)) = c =$ konst.

Da er $x = 0$ asympt. stab. og attraksjonsomr. inneh. Ω.

Obs. 2:

a) Sv. L.-funk kan gi asympt. stab. !

b) Tm. 1: Info om attr. omr. til $x=0$

c) V st. L. funk. $\Rightarrow \dot{V} < 0, x \neq 0 \Rightarrow$ iv) oppfylt.

Eks. 3: Van der Pol's likn.

(3) $\ddot{x} - \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, $\beta > 0$

$$\Updownarrow$$

(4) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = +\beta(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{cases}$

5.)

Likev. pkt.: Kun $(0,0)$

Energi: $E(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2$

$[(**)\cdot \dot{x} \iff \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2\right)}_{E} = +\beta(x^2-1)\dot{x}^2]$

$V(x_1, x_2) = E(x_1, x_2)$ sv. L. funk for $x_1 \leq 1$:

i)-ii) V C^1, $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ for $x \neq 0$

iii) $\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = +\beta(x_1^2-1)x_2^2 \leq 0$ for $x_1^2 \leq 1$

$\Omega = \{x : V(x) \leq \frac{1}{2}\}$ pos. inv.

[v. Lem. 1 siden $\nabla V(x) \neq 0$ og $\dot{V} \leq 0$]

Pause 13:03

Anta $x(t)$ glob. løsn. s.a. $V(x(t)) =$ konst.

$\Rightarrow \dot{V}(x(t)) = +\beta(x_1^2-1)x_2^2 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 0$ el. $x_1 = \pm 1$

Dvs. $x_1(t_1) \neq \pm 1 \overset{x_1 \text{ kont.}}{\Longrightarrow} x_1(t) \neq \pm 1$ for $(-\varepsilon + t_1, t_1 + \varepsilon)$, ε liten nok

$\Rightarrow x_2(t) = 0$ for $(-\varepsilon + t_1, t_1 + \varepsilon)$

$\overset{(4)}{\Longrightarrow} \dot{x}_1(t) = 0$ og $x(t) =$ konst. $(x_2 = 0, x_1 =$ konst.$)$

$\Rightarrow (x_1, x_2) = (0,0)$ (eneste likev. pkt.)

Tilsvarende: $x_2(t_1) \neq 0 \Rightarrow x_1(t) = +1$ el. $x_1(t) = -1$ ...

$\overset{(4)}{\Longrightarrow} x_2 = \dot{x}_1 = 0$ og motsigelse

Dvs.: i) - iv) holder $\overset{\text{Tm. 1}}{\Longrightarrow} (0,0)$ asympt. stab.

og $\{x : |x| \leq 1\} \subset \Omega_a$

Eks. 4:

$\dot{x}_1 = -x_1(x_1^2 + x_2^2) + x_2$

$\dot{x}_2 = -x_2(x_1^2 + x_2^2) - x_1$

Sjekk: $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ sf. L. funk. $(\dot{V} = -(x_1^2+x_2^2)^2)$

$\Rightarrow B_R = \{x : V(x) \leq \frac{R^2}{2}\}$ pos. inv. (v. Lem. 1)

Tm. 1 og Obs. 2 $\Rightarrow$ $x = 0$ asympt. stab. og

$$B_R \subset \Omega_a \quad \forall R > 0$$

Dvs. $\Omega_a = \mathbb{R}^2$ og $x = 0$ glob. asympt. stab. likev. pkt.

Obs. 3:

a) $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + a x_1 x_2 + \frac{b}{2}x_2^2$ sf. L. funk. for (***)

når f. eks. $a = \frac{b}{2} = \frac{2}{3}$ (J-S s. 363)

b) **Sjekk:** Linearisering gir asymp. stab., men ingen info om Ω_a.

C. Bevis Tm. 1

1.) Anta Tm. 1 feil, dvs. det fins

løsn. $x(t)$ s.a.

$$x(t) \in \Omega,\ t \geq 0 \quad \text{og} \quad x(t) \underset{t \to \infty}{\not\to} 0.$$

2.) Siden Ω lukka, begrensa har alle

følger i Ω konv. delfølger (Bolzano–Weierstrass).

Dvs $\{x(t_n)\}_n$, $t_n \nearrow \infty$, har delfølge s.a.

(△) $$x(t_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \in \Omega$$

Pga. av 1.) kan vi anta at $x_0 \neq 0$.

[Hvis alle konv. delfølger $\to x_0$, må også $x(t) \to x_0$
siden Ω lukka og begrenset]

3.) $\bar{x}(t) = \varphi(t; x_0)$ glob. løsn. i Ω:

a) Ω pos. inv. $\Rightarrow$ $\bar{x}(t) \in \Omega$ for $t \geq 0$

b) $\varphi(t; x(t_{n+k}))$ def. for $t \in [-t_n, 0]$, $k \geq 0$
$[\varphi(-t_n, x(t_n)) = \varphi(0, x(0)) = x(0)]$

Kont. avh. av init. data og (△) gir

$\varphi(t; x(t_{n+k})) \longrightarrow \varphi(t; x_0)$ for $t \in [-t_n, 0]$

Siden Ω lukka, er $\varphi(t; x_0) \in \Omega$, og
siden $t_n > 0$ vilk. stor, eksisterer $\bar{x} \in \Omega$ for alle $t \leq 0$.

4.) $V(\bar{x}(t)) = $ konst.:

La $V(x_0) = \alpha$. Da vil

(□) $$\lim_{n\to\infty} V(x(t_n)) = \alpha \quad (V \text{ kont.} + (\triangle))$$

La $t_{n_1} \leq t_n + s \leq t_{n_2}$, da er

$V(x(t_{n_1})) \geq V(x(t_n + s)) \geq V(t_{n_2})$ $(\dot{V} \leq 0)$

og $V(x(t_n + s)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} V(x_0)$ pga. (□)

Men $x(t_n+s) = \varphi(s; x(t_n)) \to \varphi(s; x_0) = \bar{x}(s)$ 8.)

$\overset{V \text{ kont.}}{\Longrightarrow} \quad V(x(t_n+s)) \to V(\bar{x}(s))$

Dermed er $V(\bar{x}(t)) = \alpha$, $t \in \mathbb{R}$.

3 og 4 $\to$ motsigelse mot iv),

og antakelse i 1) feil. Dvs. Tm. 1 er rett $\square$