Diff. likn. 29.3.12

A. Grensesykler og periodiske løsn. i $\mathbb{R}^2$

(Kan gjøres i $\mathbb{R}^n$ unntatt indeks)

(1) $\dot{x} = f(x)$; $f, x \in \mathbb{R}^2$

Obs. 1:

a) Grensesykel = isolert periodisk løsn.

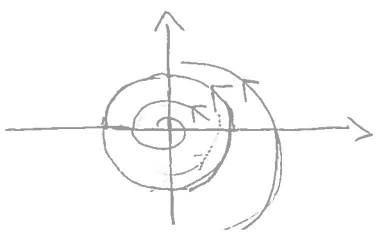
b) Periodisk løsn. $\Rightarrow$ fasebane lukka

Fasebane lukka + (1) autonomt $\Rightarrow$ løsn. periodisk
(alle omløp for lik tid)

c) Isolert: Det fins omegn om fasebanen uten andre per. løsn./lukka fasebaner.

Eks. 1:

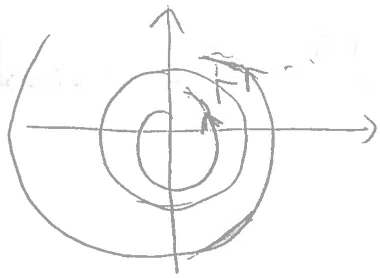
$$\begin{cases} \dot{r} = -r(r-1)^2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$



Obs: $\left.\begin{array}{l} r=1 \Rightarrow \dot{r}=0,\ \dot{\theta}>0 \\ \dot{r}<0 \text{ for } r\neq 0,\ r\neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $r=1$ gr. sykel ustab. (hvorfor?)

Eks. 2:

$$\begin{cases} \dot{r} = r\cdot(1-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$



Obs: $r=1$ gr. sykel

$$\dot{r}\begin{cases} <0 & r>1 \\ >0 & 0<r<1 \end{cases} \Rightarrow r=1 \text{ stabil}$$

Obs. 2:

Sjk.: Stab. i hht. vanlig def. i Eks 2.

Obs. 3:

i) Γ lukka farebane

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} I_{x_i} = I_{\Gamma} = 1$$

der $x_1, \ldots, x_n$ alle likev. pkt. omslutta av Γ

ii) Neg. kriterium:

$$\sum_{i=1}^{n} I_{x_i} \neq 1 \Rightarrow$$ ingen lukka farebane omslutter kun $x_1, \ldots, x_n$

iii) Må anta Γ, f s.a. indekser veldef. og $I_\Gamma = \sum I_{x_i}$

Eks. 3:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 + 1 \quad (\neq 0) \\ \dot{x}_2 = x_1(x_2^2+1) + x_2 \end{cases}$$

Ingen likev. pkt.

$\Rightarrow I_\Gamma = 0$ for alle lukka Γ

$\overset{\text{obs. 2}}{\Rightarrow}$ ingen (gr. sykler el.) lukka fasebaner

Tm. 1: Bendixons neg. kriterium

Ω åpen, enkelsmh.; f C^1 i Ω og

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} < 0 \text{ i } \Omega \quad (\text{el.} > 0 \text{ i } \Omega)$$

$\Rightarrow$ det fins ingen lukka fasebaner i Ω.

Bevis:

Anta: $\Gamma \subset \Omega$ enkel, lukka, ... fasebane.

D_Γ området omsluttet av Γ

$$0 > \iint_{D_\Gamma} \nabla \cdot f \, dx_1 dx_2 \overset{\text{div.tm.}}{=} \int_\Gamma f \cdot n \, ds \overset{f \cdot n = 0}{=} 0$$

tangent Γ normal Γ

Motsigelse $\Rightarrow$ Γ ikke fasebane $\square$

Tm. 2: Dulacs test

Ω åpen, enkel smh.; ρ, $f = (f_1, f_2)$ C^1 i Ω og

$$\nabla \cdot (\rho f) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho f_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho f_2) < 0 \text{ i } \Omega \quad (>0 \text{ i } \Omega)$$

$\Longrightarrow$ det fins ingen lukka fasebaner i Ω

Bevis: Som for Tm. 1

Eks. 4:

$$\ddot{x} + \underbrace{f(x)\dot{x}}_{\text{demping}} + g(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 &&= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1)x_2 - g(x_1) &&= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -f(x_1)$$

$\Downarrow$ Tm. 1

ingen periodiske løsn. i områder der $f > 0$ (el. $f < 0$)

Obs: Slike områder har kun pos. (el. kun neg.) demping $\to$ $|x(t)|$ avtar (vokser) over tid.

Eks. 5:

$$\dot{x}_1 = x_1^2 x_2 = f_1$$
$$\dot{x}_2 = x_1^2 x_2^2 (1 + x_1^2) = f_2$$

Obs: $x_1 = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = 0$

$x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0$

$\Longrightarrow$ løsn. krysser ikke $x_1 = 0$ el. $x_2 = 0$

$\Longrightarrow$ kvadrantene er <u>inv.</u>!

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2x_1 x_2 + 2x_1 x_2 (1 + x_1^2)$$

endrer ikke fortegn innen en kvadrant.

$\overset{\text{Tm. 7 + inv.}}{\Longrightarrow}$ ingen periodiske løsn. i $\mathbb{R}^2$

÷ B. <u>Poincaré stabilitet</u>

<u>Def. 7:</u>

a) $\Gamma_{x_0}^+ = \{ \varphi(t; x_0) \; ; \; t \geq 0 \}$

b) Avst. fra x til Ω: $\operatorname{dist}(x, \Omega) = \underset{y \in \Omega}{\overset{\text{"min"}}{\inf}} |x - y|$

c) Løsn. $x(t)$ av (7) <u>Poincaré stab.</u> hvis for alle $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ s.a.

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow \operatorname{dist}\left(\varphi(t; x), \Gamma_{x_0}^+\right) < \varepsilon \text{ for alle } t \geq 0$$

B. Poincaré avbildninger og følger i $\mathbb{R}^2$

(Kan gjøres i $\mathbb{R}^n$)

(1) $\dot{x} = f(x)$; $x = (x_1, x_2)$, $f = (f_1, f_2)$

Begreper:

1.) Transversal = ikke-parallell

2.) Poincaré snitt = kurvesegment transversal til f (til fasebaner av (1))

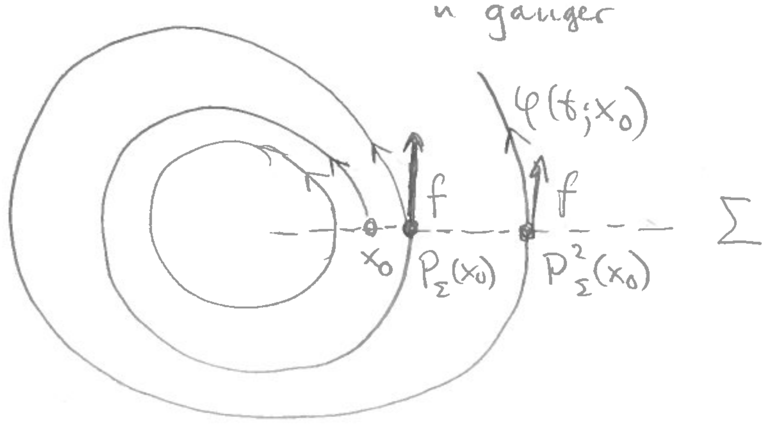
3.) Poincaréavbildning til $x_0 \in \Sigma$, Σ P. snitt:

$$P_\Sigma(x_0) = \varphi(t_{min}; x_0) \quad (\in \Sigma)$$

der φ "flow" og $t_{min} = \min\{t>0 : \varphi(t; x_0) \in \Sigma\}$

4.) Poincaréfølge: $x_0, P_\Sigma(x_0), P_\Sigma^2(x_0), \ldots, P_\Sigma^n(x_0), \ldots$

der $P_\Sigma^n(x_0) = \underbrace{P_\Sigma \circ P_\Sigma \circ \ldots \circ P_\Sigma}_{n \text{ ganger}}(x_0)$ (n× sammensetn.)

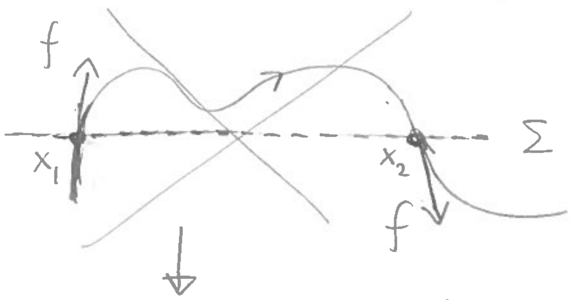


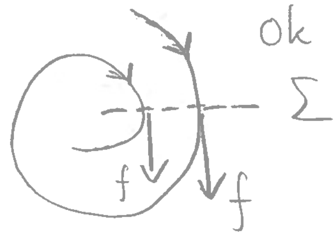
Obs. 4:

i) f, Σ transversale $\Leftrightarrow$ tangent $\Sigma \not\parallel f$

ii) $x_0 \in \Sigma \overset{\text{transv.}}{\Rightarrow} f(x_0) \neq 0$ ($0 \parallel$ alle vektorer)

iii) Σ transv. $\Rightarrow$ f peker hele tiden til én side av Σ





[$f(x)$ endres kont. fra $f(x_1)$ til $f(x_2)$ via T_Σ]

iv) P_Σ "first return map"

v) $x_0 = P_\Sigma(x_0) \Leftrightarrow x_0$ ligger på lukka fasebane

(x_0 fikspkt. for P_Σ)

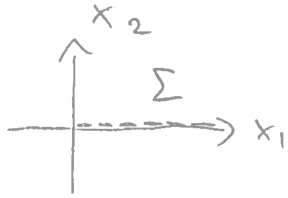
Eks. 6:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$$

Grensesykel: $r = 1$ (sjk!)

Løsn. (sjk): $\begin{cases} r = \dfrac{r_0}{r_0 + (1-r_0)e^{-t}} & (r(0) = r_0) \\ \theta = -t + \theta_0 & (\theta(0) = \theta_0) \end{cases}$

$\Sigma = \{ x : x_2 = 0 , x_1 > 0 \}$



transversal siden $\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow$ P. snitt

Siden $\varphi(t; x_0) = r(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$, vil

$x_0 \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad r(0) = |x_0| , \quad \theta(0) = n \cdot 2\pi , \; n \in \mathbb{Z}$

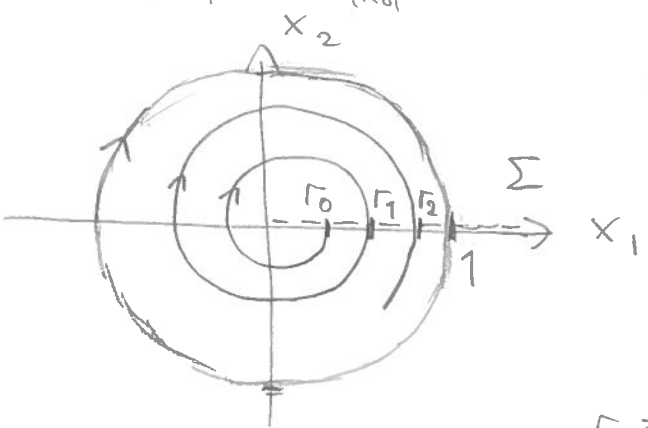
Velg $n = 0$: $\theta(0) = 0$.

$\varphi(t; x_0)$ krysser Σ hver gang $\overset{=t}{\theta} = k \cdot 2\pi , \; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \; P_\Sigma(x_0) = \varphi(t_{min}; x_0) = \varphi(2\pi; x_0) = r(2\pi) \cdot (1,0)$

$\Rightarrow \; P_\Sigma^n(x_0) = \varphi(2\pi n; x_0) = r(2\pi n) \cdot (1,0)$

$$= \frac{\cancel{r_0}\,|x_0|}{\underset{|x_0|}{\cancel{r_0}} + (1-\underset{|x_0|}{\cancel{r_0}})\,e^{-2\pi n}}(1,0)$$



$r_n = r(2\pi n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ når $\overset{r_0 \neq 1 \text{ og } r_0 \neq 0}{\cancel{r_0 < 1}}$ (og når $r_0 > 1$!)

$r = 1$ stabil, nærliggende baner konv. mot $r = 1$.
$P_\Sigma^n(x_0) \to (1,0) \in \{x : |x| = 1\}$ gr. sykel.

Obs. 5: $P_\Sigma^n x_0 \to x \in \Gamma$ gr. sykel $\Rightarrow \Gamma$ stab. fra x_0 side