Diff likn. 30.3.12

A. ω - grensemengder i $\mathbb{R}^2$

(Kan gjøres i $\mathbb{R}^n$)

(1) $\dot{x} = f(x)$; $x = (x_1, x_2)$, $f = (f_1, f_2)$

Begreper:

1) Flow $\varphi(t; x_0)$, $x(t) = \varphi(t; x_0)$ løser (1) + $x(0) = x_0$

2) $\Gamma_{x_0}^{\pm} = \{\varphi(t; x_0) : \pm t \geq 0\}$, $\Gamma_{x_0} = \Gamma_{x_0}^{+} \cup \Gamma_{x_0}^{-}$

halvbane   fasebane

3) Ω pos. inv. under (1) hvis $\Gamma_x^+ \subset \Omega$ for alle $x \in \Omega$

4.) z ω-gr. pkt. (α-gr. pkt.) for Γ_{x_0} hvis det fins $\{t_n\}$ s.a. $\varphi(t_n; x_0) \to z$ når $t_n \to \infty$ ($t_n \to -\infty$)

5.) ω-gr. mengde ω_Γ = alle ω-gr. pkt. for Γ

6.) sykel = lukka fasebane, ikke likev. pkt.

Obs. 1:

i) α-gr. mengde $\alpha_{\Gamma} = \ldots$

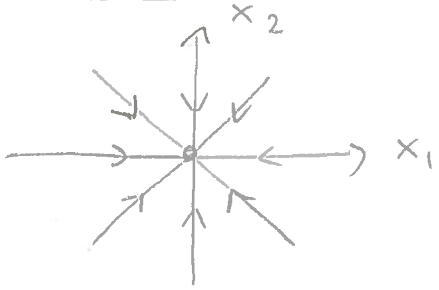
ii) $f(x_0) = 0 \implies \Gamma_{x_0} = \{x_0\}$ og $\omega_{\Gamma_{x_0}} = \{x_0\} = \alpha_{\Gamma_{x_0}}$

iii) Γ lukka fasebane $\implies \omega_{\Gamma} = \Gamma = \alpha_{\Gamma}$

iv) Sykel: gr. sykel (isolert), bane rundt senter (ikke-iso.)
(periodisk løsn.)

Eks. 1: Node

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

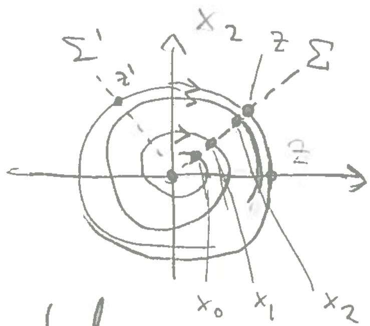


O stab. node

$\implies \omega_{\Gamma_{x_0}} = \{0\}$, $\alpha_{\Gamma_{x_0}} = \{\infty\}$ for alle $x_0 \neq 0$.

Eks. 2: Gr. sykel

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$$



$x_0, x_1, \ldots \to z \in \omega_{\Gamma_{x_0}}$
Poincaré følge

Sjk.: $r = 1$ stab. gr. sykel

$\implies \omega_{\Gamma_{x_0}} = \{x : |x| = 1\}$ for alle $x_0 \neq 0$ (sjk.)

($z \in \{r=1\}$, velg transv. Σ gj. z og $x_0 \in \Sigma$ s.a. $|x_0| < 1$.
Da vil $\varphi(t; x_0)$ krysse Σ i ∞ mange x_n og $x_n \to z$)
(siden $r_n \to 1$)

$\omega_{\{0\}} = \{0\}$ (likev.)

(bra eks. s 217 i Hirsch-Smale-Devaney)

Eks. 3: Separatrise-sykel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial x_2} + \mu H \dfrac{\partial H}{\partial x_1} \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} + \mu H \dfrac{\partial H}{\partial x_2} \end{cases} \qquad \mu < 0$$

der $H = \frac{1}{2} x_2^2 - \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{4} x_1^4$.

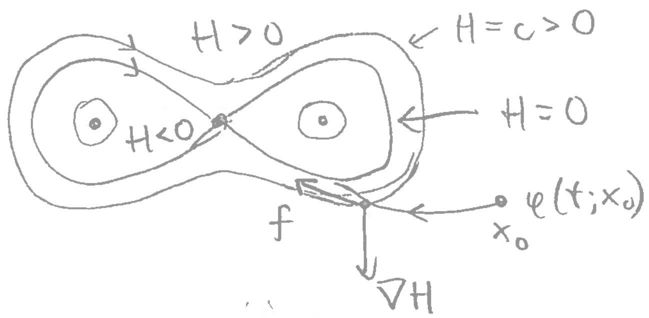
Hamiltonsk hvis $\mu = 0$.

$$\frac{d}{dt} H(x(t)) = \frac{\partial H}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} \dot{x}_2$$

$$\overset{\text{s.k.}}{=} \mu H \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)^2 \right)$$

$$\begin{matrix} \mu < 0 \\ \Rightarrow \\ \nabla H \neq 0 \end{matrix} \frac{d}{dt} H(x(t)) \begin{cases} = 0, & H = 0 \\ > 0, & H < 0 \\ < 0, & H > 0 \end{cases}$$

Likev. pkt. $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$.

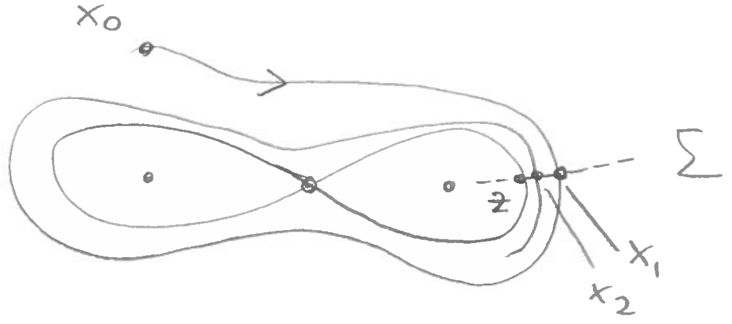


$$\nabla H \cdot f = \nabla H \cdot \dot{x} = \frac{d}{dt} H(x) \begin{cases} < 0 & \text{på } H = c > 0 \\ = 0 & \text{på } H = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi(t; x_0) \longrightarrow \{x : H(x) = 0\}$ hvis $H(x_0) > 0$

$\Rightarrow \omega_{\Gamma_{x_0}} = \{x : H = 0\}$ (se eks. 2) $(H(x_0) > 0)$

(starter på innsida $\longrightarrow$ få $\frac{1}{2}\,\infty$)



$z \in \omega_{\Gamma_{x_0}}$

Obs. 2:

i) Mulige ω_{Γ}:

ii) $\mathbb{R}^2$: $\omega_{\Gamma_{x_0}}$ = likev. pkt. el. sykel

el. separatrise-sykel (inneh. likev. pkt.)

(følger av Poincaré-Bendixon)

iii) $\mathbb{R}^n$, $n > 2$: Mer komplisert, "strange attraktors"

Pause 13:07

B. Poincaré-Bendixons tm.

Anta:

(A1) f (lok.) Lip. i $\Omega \overset{\text{åpen}}{\subset} \mathbb{R}^2$,

(A2) Γ_{x_0} fasebane, K lukka begrenset,
$\Gamma_{x_0}^+ \subset K \subset \Omega$

(A3) $\omega_{\Gamma_{x_0}}$ inneh. ingen likev. pkt.

Tm. 1: Poincaré – Bendixon

(A1), (A2), (A3) $\Rightarrow \omega_{\Gamma_{x_0}}$ sykel

Videre vil enten $\varphi(t;x_0) \in \omega_{\Gamma_{x_0}}$ for alle t el.

$\varphi(t;x_0)$ nærmer seg $\omega_{\Gamma_{x_0}}$ når $t \to \infty$.

Obs. 3:

(A3) $\Rightarrow \omega_\Gamma$ ikke likev. pkt. el. separatrise sykel!

Lem. 1: Anta (A1) og (A2).

a) $\omega_\Gamma \neq \emptyset$, $\omega_\Gamma \subset K$

b) ω_Γ lukka

c) ω_Γ smh.

d) ω_Γ inv. under (1)

Bevis:

a) >

b) La $\omega_\Gamma \ni z_n \to z \in \mathbb{R}^2$.

La $x_0 \in \Gamma$ og velg t_n s.a.

$$|\varphi(t_n;x_0) - z_n| < \frac{1}{n} \quad (z_n \in \omega_\Gamma)$$

$$|\varphi(t_n,x_0) - z| \leq |\varphi(t_n,x_0) - z_n| + |z_n - z|$$

$$\to 0, \quad n \to \infty$$

$$\overset{\text{def.}}{\Rightarrow} z \in \omega_\Gamma$$

d) La $z_0 \in \omega_\Gamma$, $x_0 \in \Gamma$.

$\Rightarrow$ fins t_n s.a. $\varphi(t_n; x_0) \to z_0$

Obs: $\underbrace{\varphi(t + t_n; x_0) = \varphi(t; \varphi(t_n; x_0))}_{\text{entydighet}} \xrightarrow[t_n \to \infty]{} \varphi(t; z_0)$

$\uparrow$ kont. avh. mhp. init. data

$\Rightarrow \varphi(t; z_0) \in \omega_\Gamma \overset{t \text{ vilk.}}{\Rightarrow} \Gamma_{z_0} \subset \omega_\Gamma$

a) La $x_0 \in \Gamma$ og $t_n \nearrow \infty$ vilk.

$\Rightarrow \{\varphi(t_n; x_0)\}$ begrenset følge

Bolzano–Weierstrass

$\Rightarrow$ fins delfølge s.a. $\varphi(t_n; x_0) \to z$ og $z \in K$ (K lukka)

$\Rightarrow \omega_\Gamma \neq \emptyset$ ($z \in \omega_\Gamma$)

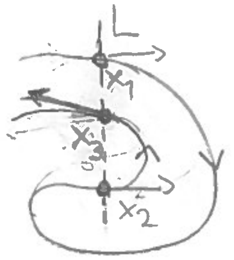
$\Gamma^+ \subset K$ lukka $\Rightarrow \omega_\Gamma \subset K$.

<u>Lem. 2:</u> Anta (A1), L transv. linjestk. ($L \nparallel f$), og Γ fasebane for (1).

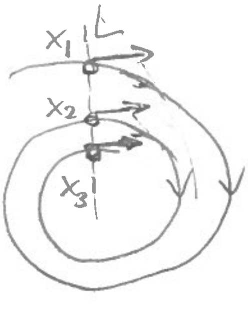
a) Γ krysser L i to ulike pkt $\Rightarrow$ Γ ikke lukka

b) Γ krysser L flere ganger

$\Rightarrow$ kryssningspkt. har samme rekkefølge på L som på Γ.

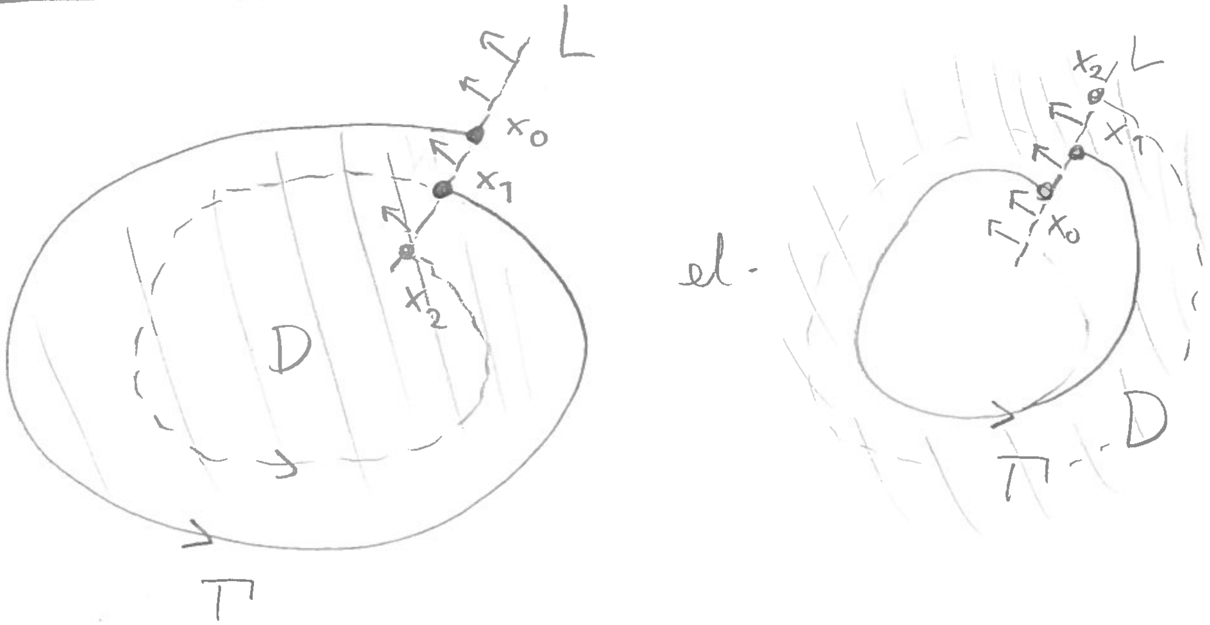


ikke samme rekkefølge (L ikke transv.!)



samme rekkefølge (L transv.)

Bevis:



Anta Γ krysser L først i x_0 så i x_1.

Siden førebaner ikke kan kr. Γ og L er transversal (f peker på samme side av L), vil første omløp av Γ + L mellom x_0 og x_1 omslutte et pos. inv. omr. D (enten innenfor el. utenfor kurven, se fig.).

$\Rightarrow \varphi(t; x_1) \in D$ for $t \geq 0$

$\Rightarrow$ a) siden $x_0 \notin D$ (Γ ikke lukka)

og b) siden hvis L krysses en gang til, da er det i D og videre i samme retning på L. (se fig.)

□

Kor.: Anta Γ fasebane, $x_0 \in \Gamma$.

$$x_0 \in \omega_\Gamma \iff \Gamma \text{ lukka fasebane}$$

Bevis:

$\Leftarrow$) ok

$\Rightarrow$) $\Gamma \subset \omega_\Gamma$ v. Lem. 1

2 muligheter:

1.) $f(x_0) = 0 \overset{\text{likev. pkt.}}{\Longrightarrow} \Gamma = \{x_0\}$ lukka

2.) $f(x_0) \neq 0 \Longrightarrow$ fins transv. L gj. x_0

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \in \omega_\Gamma \\ \text{og } x_0 \in \Gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{fins } t_n > 0 \text{ s.a. } \varphi(t_n, x_0) \xrightarrow[t_n \to \infty]{} x_0$$

L transv.

$$\Longrightarrow \text{fins } \tilde{t}_n > 0 \text{ s.a. } L \ni \tilde{x}_n = \varphi(\tilde{t}_n, x_0) \xrightarrow[t_n \to \infty]{} x_0$$

φ kont (Γ kont) (Γ kr. L ∞ mange ganger)

Lem. 2 $\Longrightarrow |x_0 - \tilde{x}_n| \geq |x_0 - \tilde{x}_{n-1}| \cdots \geq |x_0 - \tilde{x}_1|$
(rekkefølge)

Selvmotsigelse hvis ikke $\tilde{x}_n \equiv x_0$ 9.)

$\Longrightarrow x_0 = \tilde{x}_1$ og Γ lukka bare (entydighet) $\square$

Ide: $\begin{cases} x_0 \in \Gamma \to \text{kr. pkt. fjerner seg fra } x_0 \text{ (Lem.2)} \\ x_0 \in \omega_\Gamma \to \text{kr. pkt. nærmer seg } x_0 \end{cases}$

14:07