Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen:
Nils A. Baas   73 59 35 19/20

EKSAMEN I SIF5025 DIFFERENSIALLIGNINGER OG DYNAMISKE SYSTEMER

Bokmål
Fredag 31. mai 2002
Tid: 0900-1500

Tillatte hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne.
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling.

Oppgave 1
Avgjør om origo er et stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt likevektspunkt for følgende system

a) $\dot{x} = 3x + y^2$
$\dot{y} = -2x + y^3$

b) $\dot{x} = -2x - 2y + 2yz$
$\dot{y} = x - y - xz - xz^2$
$\dot{z} = 3xyz - z^3$

c) $\dot{x} = x^3 + xy^4 + x^3z^6$
$\dot{y} = y^3 + yz^6 + y^3z^8$
$\dot{z} = z^3 + zw^8 + z^3w^{10}$
$\dot{w} = w^3 + wx^{10} + w^3x^{12}$

Oppgave 2

a) Avgjør om systemet

$\dot{x} = x^2 + y^2 + e^y$

$\dot{y} = x - y^2$

har en periodisk bane.

b) Avgjør hva slags likevektspunkt origo er for systemet

$\dot{x} = -x + y$

$\dot{y} = -x - y$

Skisser fasediagrammet.

c) Avgjør om origo kan være et asymptotisk stabilt likevektspunkt for systemet

$\dot{x} = 2y(z - 1)$

$\dot{y} = -x(z - 1)$

$\dot{z} = xy$

(Hint: Argumenter uten å bruke Liapunovteori !)

Oppgave 3

a) Formuler Bendixsons negative kriterium.

b) Har systemet

$\dot{x} = y$

$\dot{y} = -x + y(1 + x^2 + x^4)$

noen periodisk bane?

c) En vektsmodell for to populasjoner er gitt ved

$\dot{x} = xF(x, y)$

$\dot{y} = yG(x, y)$

hvor F og G er C^1-funksjoner. Anta at $\dfrac{\partial F}{\partial x} < 0$ og $\dfrac{\partial G}{dy} < 0$.

Vis at systemet ikke har noen periodisk bane i første kvadrant $(x > 0, y > 0)$

(Hint: Benytt en utvidelse av Bendixsons negative kriterium.)

Oppgave 4
Gitt et dynamisk system

$\dot{x} = f(x)$

som er C^1 og definert på

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 | \quad 1 \leq \|x\| \leq 2\}$$

($\| \quad \|$ er vanlig euklidisk norm). Anta at for alle x på randen av A er $f(x)$ en tangentvektor og forskjellig fra nullvektoren. Skisser de mulige faseportrettyper en kan ha i A under antagelsen at der ikke er likevektspunkter eller periodiske baner unntatt randkomponentene, og disse kan være både ens og motsatt rettet.

Oppgave 5

a) Hva menes med en stabil grensesykel for et todimensjonalt dynamisk system?

b) Kan systemet

$\dot{x} = ax + by$

$\dot{y} = cx + dy$

ha en stabil grensesykel for passende valg av konstantene a, b, c og d ?

Oppgave 6
La C være en enkel, glatt og lukket kurve i planet. Gitt

$$\dot{x} = f(x), \quad f \text{ er } C^1,$$

slik at dette systemet har 3 sadelpunkter, 2 sentre, en spiral og 2 knutepunkter (noder) innenfor C.

Kan C være en løsningskurve for systemet?

Oppgave 7

a) Formuler Poincaré-Bendixson teoremet.

b) Vis at systemet

$\dot{x} = y - x^3 + x$

$\dot{y} = -x - y^3 + y$

har en periodisk bane. (Anta som kjent at origo er eneste likevektspunkt).

Oppgave 8

La $d \in < 1, 2 >$. Konstruer en delmengde av planet ($\mathbb{R}^2$) slik at dens fraktaldimensjon blir d.