SIF5025: Differensiallikninger og dynamiske systemer

Løsningsskisse til eksamen mai 2003

Oppgave 1 Bestem likevektspunktene til følgende system og skisser fasediagrammene (med orientering)

a)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$$

Systemet kan skrives $\dot{x} = Ax$, med

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det har kun likevektspunkt i origo. A har egenverdier $\lambda = \pm i$, og origo er dermed et senter. Orienteringen er negativ (med klokka).

b)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy\\ \dot{y} &= -x^2\end{aligned}$$

Mengden av likevektspunkter er gitt ved $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$, altså hele y-aksen. Vi integrerer opp systemet:

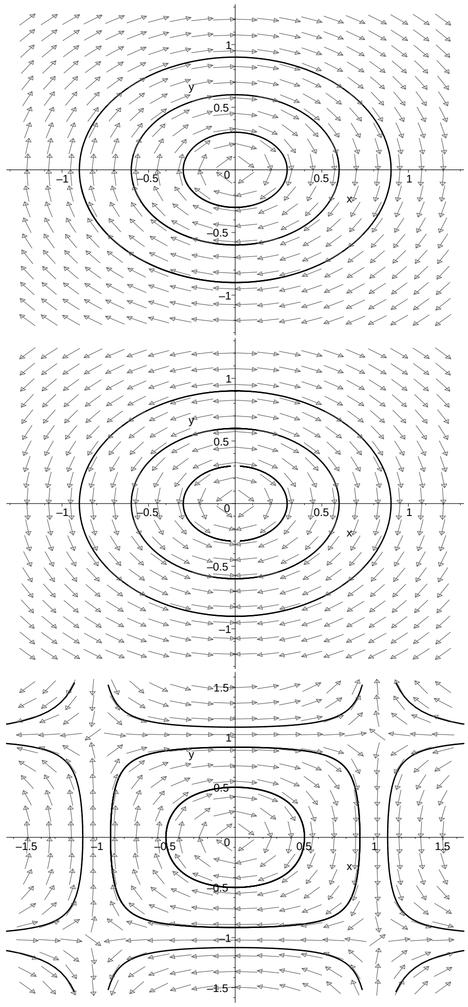
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

som gir $x^2 + y^2 = c$. Løsningskurvene er altså sirkler.

c)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(1 - x^2)\\ \dot{y} &= -x(1 - y^2)\end{aligned}$$

Det er likevektspunkter i (0,0), (1,1), (-1,1), (1,-1) og (-1,-1). Ved linearisering kan origo vises å være et (lineært) senter, mens de andre punktene er sadler. Vi



Figur 1: Fasediagram for hhv. oppgave 1a, 1b og 1c

integrerer opp systemet:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1-y^2)}{y(1-x^2)}$$
$$-\int \frac{xdx}{1-x^2} = \int \frac{ydy}{1-y^2}$$
$$-\ln|1-x^2| = \ln|1-y^2| + c$$

som gir at

$$(1-x^2)(1-y^2) = c.$$

For $c = 0$ får vi $x = \pm 1$ eller $y = \pm 1$. Videre er systemet symmetrisk både om x og y aksen og origo må være et (ikke-lineært) senter.

Oppgave 2 Avgjør om origo er et asymptotisk stabilt, stabilt eller ustabilt likevektspunkt i systemene

a)

$$\dot{x} = -x^3 - 2xy$$
$$\dot{y} = x^2 - 3y^3$$

Definer Liapunovfunksjonen $V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$. En finner at

$$\dot{V} = x\dot{x} + 2y\dot{y} = -(x^4 + 6y^4) < 0 \text{ (unntatt i origo).}$$

Ergo er dette en strikt Liapunovfunksjon, og origo er asymptotisk stabil.

b)

$$\dot{x} = -x - x^2 y$$
$$\dot{y} = 2x^2 + y$$

Lineariseringa i origo er gitt ved matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egenverdiene er $\lambda = \pm 1$, altså er origo en lineær sadel. Ved Hartman-Grobmans teorem har vi da også en ikke-lineær sadel, og origo er ustabilt.

Oppgave 3 Gitt systemet

$$\dot{x} = -x - xy^2 - x^3$$
$$\dot{y} = -7y + 3x^2 y - 2yz^2 - y^3$$
$$\dot{z} = -5z + y^2 z - z^3$$

a) Vis at origo er et stabilt likevektspunkt.

Lineariseringa i origo er gitt ved matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Denne har kun reelle, negative egenverdier. Ved Hartman-Grobmans teorem er da origo et asymptotisk stabilt likevektspunkt.

b) Vis at enhver løsningskurve vil gå mot origo når $t \to \infty$ - uansett hvor den starter.

Dette holder om det eksisterer en strikt Liapunovfunksjon på hele $\mathbb{R}^3$. Sett $V = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2$. Dette gir

$$\dot{V} = -3x^2 - 3x^4 - 7y^2 - y^4 - 10z^2 - z^4 < 0 \text{ unntatt i origo}$$

Oppgave 4 Avgjør om null-løsningen til differensialligningen

$$\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = \ddot{x}(x + \dot{x})$$

er stabil, asymptotisk stabil eller ustabil.

Sett

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= z = \ddot{x} \\
\dot{z} &= \dddot{x} = -2x + y + 2z + z(x + y).
\end{aligned}$$

Linearisering i origo gir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrisa A har karakteristisk polynom $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$, noe som gir $\lambda = \pm 1$ og $\lambda = 2$. Altså er origo et hyperbolsk likevektspunkt og ved Hartman-Grobman er origo ustabilt.

Oppgave 5

a) Hva menes med lineariseringen (eller den lineære approksimasjonen) av et system

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \text{ er } C^1$$

i et likevektpunkt?

Lineariseringa fåes ved å Taylorutvikle vektorfeltet f om likevektpunktet x_0, og stryke alle ledd av orden to eller høyere. Siden x_0 tilfredstiller $f(x_0) = 0$ gir dette systemet

$$\dot{\xi} = A\xi$$

Der $A = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0))$ er Jacobimatrisen i x_0, og vi har translatert koordinatsystemet slik at likevektspunktet havner i origo (altså satt $\xi = x - x_0$).

b) Videre er gitt systemet

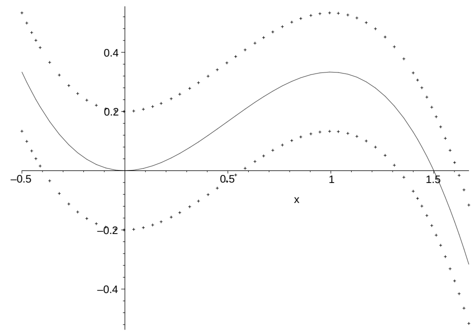
$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= x - x^2
\end{aligned}$$

Bestem likevektspunktene og typen til lineariseringen i disse.

Likevektpunktene er (0,0) og (1,0). Jacobimatrisen er

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Dette gir egenverdier $\lambda = \pm 1$ for origo, som dermed er en sadel, og egenverdier $\lambda = \pm i$ for (1,0), som dermed er et (lineært) senter.



Figur 2: Heltrukket linje er funksjonen $x^2 - \frac{2}{3}x^3$. Prikkede linjer er funksjonene $x^2 - \frac{2}{3}x^3 \pm \frac{1}{5}$

c) Vis at systemet har en homoklin bane som er gitt ved ligningen

$$y^2 = x^2 - \frac{2}{3}x^3.$$

Vi integrer opp systemet:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{x - x^2}{y} \\ -\int (x - x^2)dx &= \int ydy \\ y^2 &= x^2 - \frac{2}{3}x^3 + c. \end{aligned}$$

Banen som går gjennom origo er gitt ved $c = 0$. Vi må vise at denne faktisk er homoklin.

Bemerk at alle løsningskurver er symmetriske om x-aksen. Vi skisserer funksjonen y^2. Som vi ser har banen $y^2 = x^2 - \frac{2}{3}x^3$ nøyaktig to skjæringer med x-aksen. Ved symmertri er den dermed lukket og må være være homoklin siden origo er et sadelpunkt.

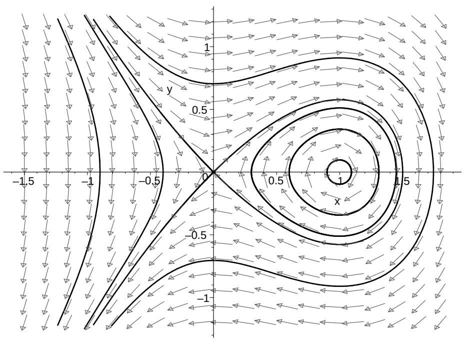
d) Vis at alle lukkede baner ligger innenfor den homokline banen, og alle åpne baner ligger utenfor.

Fra grafen til y^2 og litt funsksjonsdrøfting får vi ved symmetri lukkede baner innenfor den homokline bane for $-\frac{1}{3} < c < 0$. For $c > 0$ og $c < -\frac{1}{3}$ får vi ved symmetri kun åpne baner.

Vi kan også bruke indeksteori til å umiddelbart fastslå at alle periodiske baner må ligge innenfor den homokline banen, siden en periodisk bane alltid må omslutte likevektspunkter med samlet indeks 1, og da er denne plasseringen eneste mulighet. Men vi må likevel bruke symmetri for å fastslå at *alle* baner innenfor den homokline er periodiske.

e) Gi en grov skisse av fasediagrammet (med orientering)

Dette tegner vi på grunnlag av uttrykket for løsningskurvene: $y^2 = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + c$.



Figur 3: Oppgave 5e

Oppgave 6 Bestem indeksen i uendelig for systemet

$$\dot{x} = x - y$$
$$\dot{y} = x - y^2.$$

Systemet har likevektspunkter (0,0) og (1,1). Linearisering i (x,y) gir

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}.$$

Vi finner at $A(0, 0)$ har egenverdier $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. Altså er origo en ustabil spiral (med indeks 1). Matrisa $A(1, 1)$ har egenverdier $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, altså er (1,1) en sadel (med indeks -1).

Begge likevektspunktene er ikke-degenererte. Dermed vil indeksen for likevektspunktene i det ikke-lineære systemet være det samme som indeksen til lineariseringene.

Teorem 3.4 fra læreboka gir

$$I_\infty = 2 - I_{(0,0)} - I_{(1,1)} = 2.$$

Oppgave 7 Vis at origo er et asymptotisk stabilt likevektspunkt for systemet

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\beta(x^2 - 1)y - x$$

med $\beta < 0$.

Lineariseringa til systemet i origo er gitt ved matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Denne har egenverdier $\lambda = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4}}{2}$. For alle $\beta < 0$ har begge egenverdiene negativ realdel. Ved Hartman-Grobman er origo dermed et asymptotisk stabilt likevektspunkt.

Oppgave 8 Vis at følgende system har en periodisk bane:

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + 2y^2)$$
$$\dot{y} = x + y - y(x^2 + 2y^2).$$

Vi starter med å omforme systemet til polarkoordinater. Litt regning gir

$$\dot{r} = r(1 - r^2(1 + \sin^2\theta))$$
$$\dot{\theta} = 1.$$

Merk at $1 \leq 1 + \sin^2\theta \leq 2$. Dette gir at

$$r < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \dot{r} > 0$$
$$r > 1 \Rightarrow \dot{r} < 0.$$

Altså er området mellom $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $r = 1$ invariant. Siden $\dot{\theta} = 1$ finnes ingen likevektspunkter i dette området, og ved Poincaré-Bendixson må det finnes en periodisk bane i området.

Oppgave 9 En "skjev" Cantormengde konstureres som følger: start med enhetsintervallet [0,1], del det i fire like store deler, fjern den tredje delen. Gjenta konstruksjonen med de to resterende delene, og fortsett i det uendelige. Regn ut fraktaldimensjonen til grensemengden.

Grensemengden A er attraktoren til kontraksjonene

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2}x$$
$$\phi_2(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

Ved teorem i notatet er fraktaldimensjonen d da gitt som løsningen av

$$(\frac{1}{2})^d + (\frac{1}{4})^d = 1$$

Vi setter $(\frac{1}{2})^d$ som den ukjente og løser som en andregradsligning. Vi kommer med litt regning frem til

$$d = \frac{\ln(\sqrt{5} + 1)}{\ln 2} - 1 = 0,69424\ldots$$