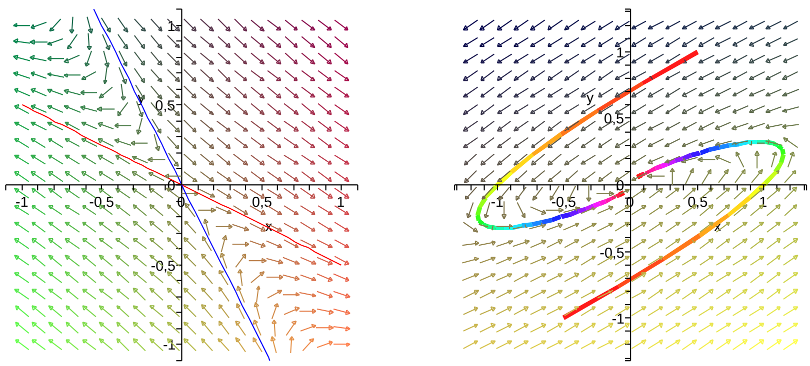
TMA4165: Differensiallikninger og dynamiske systemer

Løsningsskisse til eksamen mai 2004

Oppgave 1 Vi finner egenskapene til fasediagrammet ved å finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen til systemet.

På oppg. a) finner vi at $\lambda = -1$ og 2. Altså er origo en sadel. Stabil og ustrabil retning er gitt hhv. ved egenvektorene $(2, -1)^T$ og $(1, -2)^T$.

På oppg. b) finner vi at $\lambda = -1 \pm i$. Altså er origo en stabil spiral. Retning er mot klokka.



Figur 1: Faseportretter. Venstre: Oppg. 1a. Stabil mangfoldighet er blå og ustabil mangfoldighet er rød. Høyre: Oppg 1b. To strømlinjer er inntegnet.

Oppgave 2

a) Ved linearisering og Hartman-Grobmans teorem ser vi greit at dette er en sadel, altså et ustabilt likevektspunkt.

b) Divergensen til vektorfeltet er $\nabla \mathbf{X} = 9x^2y^4 + 2e^x > 0$. Ved Bendixsons negative kriterium finnes da ingen periodiske løsninger.

c) Transformasjon til polarkoordinater gir

$$\dot{r} = r \sin r^2$$
$$\dot{\theta} = 1$$

Ut ifra dette ser vi at det finnes mange periodiske baner, f.eks. sirkelen med radius $r = \sqrt{\pi}$.

Oppgave 3

a) Vi prøver med Liapunovfunksjonen $V = \frac{1}{2}(ax^2 + y^2 + z^2)$, og får

$$\dot{V} = (1 - 2a)xy + (2a - 1)xyz - z^4$$

Dersom vi velger $a = \frac{1}{2}$ får vi $\dot{V} \leq 0$ utenfor origo. Vi kan konkludere med at origo er stabil. (Men ikke *asymptotisk* stabil: xy-planet er invariant, og restriksjonen av systemet til xy-planet gir et senter.)

b) Se på funksjonen $U = xy$. Vi får $\dot{U} = x^4 + y^4$. Siden $\dot{U} > 0$ utenfor origo kan vi konkludere med at origo er ustabilt. (Se teorem 10.13 i læreboka.)

Oppgave 4 Se læreboka side 109.

Oppgave 5

a) Transformasjon til polarkoordinater gir

$$\dot{r} = r(1 - r)$$
$$\dot{\theta} = -1$$

Vi ser at banen $r = 1$ er periodisk. Innenfor denne banen er $\dot{r}$ negativ og utenfor er $\dot{r}$ positiv. Det betyr at ingen andre periodiske baner kan eksistere.

b) Siden $\dot{\theta}$ er konstant lik -1 vil et omløp rundt origo alltid ta tid $t = 2\pi$. Anta at vi starter i r_0. Vi integrer opp systemet $\dot{r} = r(1 - r)$, og får

$$r(t) = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{r_0}\right) e^{-t}\right)^{-1}$$

Dette gir Poincaré avbildningen:

$$r_{n+1} = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{r_n}\right) e^{-2\pi}\right)^{-1}$$

Dett er instruktivt å instruktivt å transformere denne til

$$\left(1 - \frac{1}{r_{n+1}}\right) = \left(1 - \frac{1}{r_n}\right) e^{-2\pi} = \left(1 - \frac{1}{r_0}\right) e^{-2(n+1)\pi}$$

Oppgave 6

a) I Liénard-planet blir systemet

$$\dot{x} = y - F(x)$$
$$\dot{y} = -g(x)$$

med $F(x) = -\int_0^x f(u)du$. Systemet har en entydig periodisk løsning dersom

1. $F(x)$ er en odde funksjon.
2. $F(x)$ kun er null i $x = 0$ og i $x = \pm a$ for en $a > 0$.
3. $F(x) \to \infty$ monotont for $x > a$ når $x \to \infty$.
4. $g(x)$ er en odde funksjon og $g(x) > 0$ for $x > 0$.

b) Ved å benytte betingelsene i a finner vi at systemet har en unik periodisk løsning dersom m er et partall og n er odde.

Oppgave 7 Vi har her et iterert funksjonssystem bestående av fire similtuder: tre med kontraksjonsfaktor $\frac{1}{4}$ og en med faktor $\frac{1}{2}$. Dimensjonen D finnes som løsningen av ligningen

$$\left(\frac{1}{2}\right)^D + 3\left(\frac{1}{4}\right)^D - 1 = 0$$

Svaret blir

$$D = 1 + \log_2(3) - \log_2(\sqrt{13} - 1) \approx 1.2034$$