



Kontakt under eksamen:
Idar Hansen 73 59 35 28/20

EKSAMEN I TMA4165 DIFFERENSIALLIGNINGER OG DYNAMISKE SYSTEMER

Bokmål
Fredag 21. mai 2004
Tid: 0900-1400

Tillatte hjelpemidler:
- kode D: Bestemt, enkel kalkulator tillatt (HP30S).

Alle svar skal begrunnes.

Sensuren faller 14. juni 2004

Oppgave 1

Skissér fase-diagrammene med orientering for følgende to system

a)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + 2y \\ \dot{y} &= -2x - 2y \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 5y \\ \dot{y} &= x - 3y \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Avgjør om origo er et stabilt eller ustabilt likevektspunkt for systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + y^2 \\ \dot{y} &= -2y + y^3\end{aligned}$$

Avgjør om følgende system har en periodisk løsning

b)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x^3y^4 + 5y \\ \dot{y} &= 2ye^x + x^3\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x \sin(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + y \sin(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

Oppgave 3

Avgjør om origo er et stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt likevektspunkt for følgende to system

a)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2y + 2yz \\ \dot{y} &= x - xz \\ \dot{z} &= -z^3\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^3 + x^2y \\ \dot{y} &= x^3 - xy^2\end{aligned}$$

Oppgave 4

Formuler og bevis Bendixsons negative kriterium.

Oppgave 5

Gitt systemet

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = x + y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = -x + y - y\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

a) Vis at (*) har en entydig periodisk bane Γ .

b) Bestem Poincaré-avbildningen til Γ med start på den positive x -aksen.

Oppgave 6

a) Overfør differensialligningen

$$(*) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

til et system i Liénard-planet og angi betingelser som garanterer at (*) har en entydig periodisk løsning.

b) La $m, n \geq 1$ være hele tall. Finn betingelser på m og n som garanterer at

$$\ddot{x} + (x^m - 1)\dot{x} + x^n = 0$$

har en entydig periodisk løsning.

Oppgave 7

Gitt et kvadrat. Kvadratet deles opp i 16 like store kvadrater som på figuren, og de mørke delene fjernes. Denne konstruksjonen gjentas så for hvert av de 4 gjenstående kvadratene. Gjør dette n ganger og la A være attraktoren en får ved å la $n \rightarrow \infty$.

Finn fraktaldimensjonen til A .

