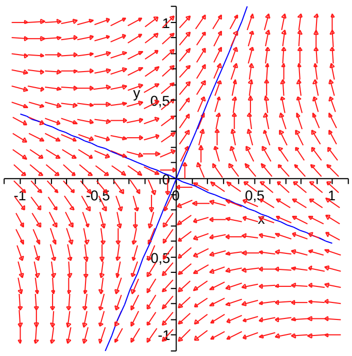
TMA4165: Differensiallikninger og dynamiske systemer

Løsningsskisse til eksamen juni 2005

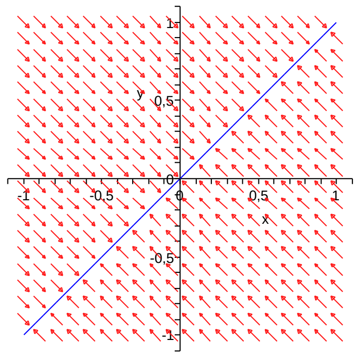
Oppgave 1 Systemet er altså gitt som $\dot{x} = Ax$. Vi diskuterer ut ifra egenverdiene til matrisen A.

I Reelle egenverdier λ_1 og λ_2:

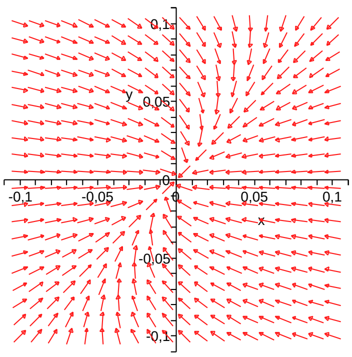
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Sadel



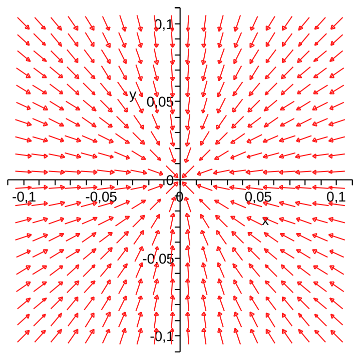
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$. Degenerert sadel. (Tilsv. for $\lambda_1 > 0$)



$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Stabil node. (Tilsv. ustabil node for $0 < \lambda_1 < \lambda_2$)

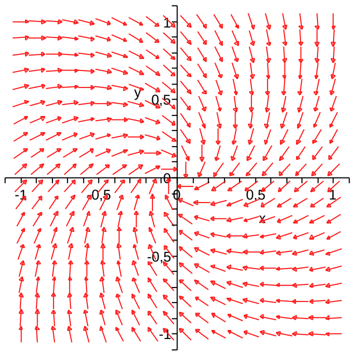


$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Degenerert stabil node. (Tilsv. deg. ustabil node for $0 < \lambda_1 = \lambda_2$)

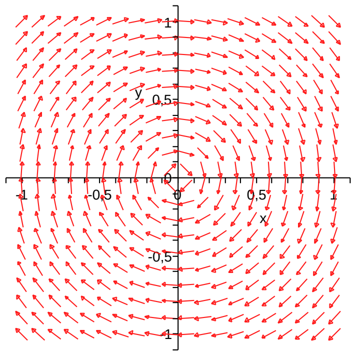


II $\lambda = \alpha \pm i\beta$:

$\alpha < 0$, $\beta < 0$. Stabil spiral med klokka.
(Tilsv. ustabil spiral for $\alpha > 0$.)
(Tilsv. mot klokka for $\beta > 0$.)



$\alpha = 0$, $\beta < 0$. Senter. Omløp med klokka.
(Tilsv. mot klokka for $\beta > 0$.)



Oppgave 2

a) Jacobimatrisen til systemet tatt i origo har kun negative, reelle egenverdier. Så ved Hartman-Grobman teoremet er origo en stabil node.

b) Se på Liapunovfunksjonen $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Vi får

$$\dot{V} = -x^2 - 7y^2 - 5z^2 - (x^2 + y^2)^2 - z^4 - y^2 z^2$$

Siden $\dot{V} < 0$ *overalt* bortsett fra i origo er Liapunovfunksjonen global, og alle løsningskurver vil bevege seg mot origo.

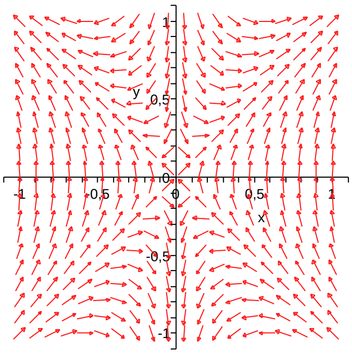
Oppgave 3

a) Indeks $+1$ kan f.eks. være et senter. De to andre tilfellene løses best ved å bruke Bendixsons teorem, som sier at dersom h er antallet hyperbolske sektorer rundt et isolert likevektspunkt og e er antallet elliptiske sektorer, så er indeksen gitt ved (Perko, side 305):

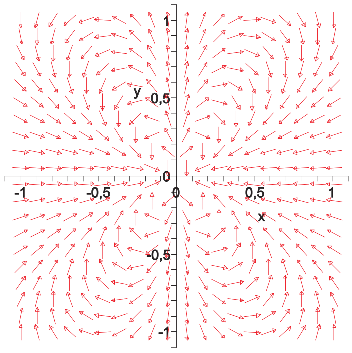
$$I = 1 + \left(\frac{e - h}{2}\right)$$

Vi kan da velge

$h = 6,\ e = 0\ \Rightarrow I = -2$



$h = 0,\ e = 4\ \Rightarrow I = 3$



b) Vi har at

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y^2}{2xy} = \frac{3x}{2y} - \frac{y}{2x}. \tag{1}$$

For å finne indeksen legger vi et kvadrat rundt origo. Det kan f.eks. gå gjennom $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ og $(1,-1)$. Vi ser på antall ganger p som $\tan\theta$ skifter fra $-\infty$ til ∞ og antall ganger q som $\tan\theta$ skifter motsatt vei. Indeksen blir $\frac{1}{2}(p-q)$.

Vi finner at langs linjestykket fra $(1,1)$ til $(-1,1)$ skifter $\tan\theta$ fra $-\infty$ til ∞ en gang, og ingen den andre vegen. Tilsvarende skifter $\tan\theta$ fra $-\infty$ til ∞ en gang langs hvert av de fire linjestykkene. (Husk at vi skal gå mot klokka). Det betyr at $p = 0$ og $q = 4$, altså er indeksen til likevektspunktet i origo -2.

Oppgave 4 En omforming av systemet til polarkoordinater gir

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(2 - r^4)\\ \dot{\theta} &= -1\end{aligned}$$

Altså er $r = \sqrt[4]{2}$ en periodisk løsning.

Oppgave 5

a) Generelt må en periodisk bane alltid omslutte en samling av likevektspunkter hvis indekser har sum lik en. Siden området er enkeltsammenhengende ligger disse likevektspunktene i området. Altså vil hver periodisk bane omslutte minst et likevektspunkt.

b) Se Jordan & Smith side 353. Tilfellet at banen går mot en "graphic" mangler i boka, men er behandlet i forelesningene.

c) Sett $g(x) = f(x) - x$. Vi vil vise at $\dot{x} = g(x)$ har et likevektspunkt (altså et punkt der $g(x) = 0$). Dersom g har et likevektspunkt på randen er vi i mål. Anta derfor at så ikke er tilfellet. Siden $x \in D^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) \in D^2$, så vil $g(x) = f(x) - x$ peke innover i området for alle x på randen. Det vil si at D^2 er g-invariant (ingen løsningskurver forlater området). Men da må g ved Poincaré-Bendixson ha en likevektstilstand eller periodisk løsning i D^2. Dersom det er en periodisk løsning må denne igjen inneholde et likevektspunkt ved oppgave a).

Oppgave 6 Det finnes to likevektspunkter, $(-1,-1)$ og $(1,1)$. Jacobimatrisen til systemet er gitt som

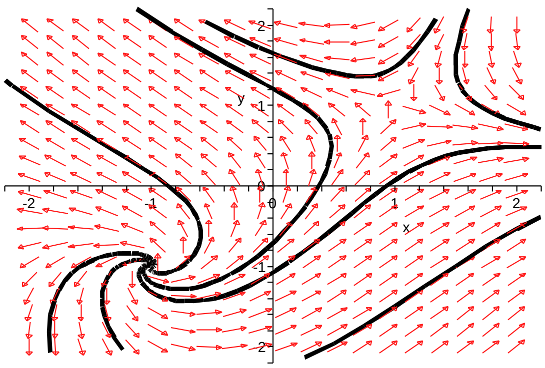
$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -y & -x \end{pmatrix}$$

Egenverdiene til $J(-1,-1)$ er gitt som $\lambda = 1 \pm i$. Altså har vi ved Hartman-Grobman teoremet en ustabil spiral i $(-1,-1)$. Retningen er mot klokka (det finner vi f.eks. ved å se på fortegnet til $\dot{y}$ på linja $y = -1$).

Egenverdiene til $J(1,1)$ er gitt som $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Altså har vi ved Hartman-Grobman teoremet en sadel i $(1,1)$. Tilhørende egenvektorer er gitt ved

$$(1, 1 - \lambda)^T.$$

Faseplot:



Oppgave 7

a) Vi tar utgangspunkt i enhetskuben og konstruerer et iterert funksjonssystem bestående av n kontraksjoner med samme kontraksjonsfaktor α. Så finner vi α som gir riktig dimensjon d. Sammenhengen vil være gitt ved

$$n\alpha^d = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = n^{-1/d}$$

gitt at bildene til avbildningene i IFS'en er ikke-overlappende. Dette vil være tilfellet dersom vi velger $n = 8$ og de åtte kontraksjonene slik at kontraksjon i krymper enhetskuben med faktor α og plasserer den i hjørne nr. i av den orginale kuben (med en vilkårlig ordning av hjørnene).

b) Fraktaldimensjonen til mengden er gitt som

$$D(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

der $N(\varepsilon)$ er antallet baller (i dette tilfellet intervaller) med radius ε som behøves for å dekke F.

Mengden blir tettere og tettere dess nærmere null en kommer. Et lite intervall vil derfor dekke mange punkter nært null, men lenger ute trengs ett intervall per punkt. Sett

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{4n^2-1}$$

For å dekke alle punkter i $[0, \frac{1}{2n+1}]$ trengs n intervaller av lengde ε_n (egentlig litt færre, men det er uvesentlig siden vi likevel skal ta logaritmen). For å dekke resten av mengden F trengs også n intervaller (et for hvert element i mengden her). Tilsammen trenger en altså $2n$ intervaller av lengde ε_n for å dekke mengden. Vi får

$$D(F) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln 2n}{\ln(4n^2-1)} = \frac{1}{2}$$